

THÈSES
PRÉSENTÉES
A LA FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY - UNIVERSITÉ DE PARIS
POUR OBTENIR
LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

par
Claude FRANÇOIS



- 1^{re} THÈSE : Emploi des méthodes de perturbation pour l'étude des écoulements
laminaires. Applications aux problèmes de séparation.
- 2^e THÈSE : Méthodes numériques en météorologie.

Soutenues le 1er juin 1970 devant la Commission d'examen.

MM. DENY

Président

GUIRAUD

CABANNES

TEMAM

} Examineurs.

O. N. E. R. A.
29, Avenue de la Division Leclerc,
92 CHATILLON

1970

THÈSES
PRÉSENTÉES
A LA FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY - UNIVERSITÉ DE PARIS
POUR OBTENIR
LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

par
Claude FRANÇOIS



- 1^{re} THÈSE : Emploi des méthodes de perturbation pour l'étude des écoulements
laminaires. Applications aux problèmes de séparation.
- 2^e THÈSE : Méthodes numériques en météorologie.

Soutenues le 1er juin 1970 devant la Commission d'examen.

MM. DENY	Président
GUIRAUD	} Examineurs.
CABANNES	
TEMAM	



REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur J.P. GUIRAUD qui m'a guidé dans ce travail et qui, au cours de nombreux entretiens, m'a fait bénéficier de son expérience par ses conseils et ses remarques judicieuses.

Ma gratitude s'adresse également à Monsieur l'Ingénieur Général P. CARRIÈRE et à l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales, qui m'ont fourni les moyens d'effectuer ce travail, ainsi qu'à Monsieur le Professeur P. GERMAIN pour l'intérêt qu'il a montré à la poursuite de cette étude en transmettant plusieurs communications à l'Académie des Sciences.

Je tiens à remercier aussi Monsieur le Professeur DENY qui a bien voulu accepter la présidence de mon jury de thèse, Monsieur le Professeur CABANNES qui, en tant que délégué de la commission de mathématiques, a eu la charge de lire et de porter un jugement sur ma thèse en très peu de temps, ainsi que Monsieur TEMAM qui a su me proposer un deuxième sujet particulièrement intéressant.

Merci enfin, à tous mes collègues et amis de l'O.N.E.R.A., ainsi qu'à toutes les personnes qui ont contribué à l'édition de cette thèse et à la préparation matérielle de la soutenance.



TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I	7
I,1 — Introduction générale	7
I,2 — But et plan du présent travail	9

PREMIÈRE PARTIE

Étude asymptotique des équations de Navier-Stokes.

CHAPITRE II : Étude générale des approximations des équations de Navier-Stokes	13
II,1 — Pose du problème	13
II,2 — Non dimensionnalisation des fonctions et variables	13
II,3 — Formes simplifiées possibles des équations de Navier-Stokes	14
II,3.1 — Mouvements à contraintes visqueuses prépondérantes	15
II,3.2 — Mouvements à contraintes visqueuses négligeables	15
II,3.3 — Mouvements visqueux classiques	16
II,3.4 — Conclusion	17
II,4 — Conditions de raccord entre deux domaines décrits par des approximations distinctes	18
II,4.1 — Généralités	18
II,4.2 — Classification des divers cas possibles ; choix des axes	18
II,4.3 — Récapitulation et expression des conditions de raccord	21
II,4.4 — Premières conséquences	23
II,4.5 — Étude systématique des comportements algébriques	26
II,5 — Exemples d'application	26
II,5.1 — Théorie classique de la couche limite	26
II,5.2 — Région Navier-Stokes dans une couche limite	27
II,5.3 — Région Navier-Stokes dans une zone de mélange	28
II,5.4 — Région Navier-Stokes contiguë simultanément à une couche limite et une zone de mélange	29
CHAPITRE III : Étude du comportement de la solution au voisinage d'une paroi	30
III,1 — Introduction	30
III,2 — Linéarisation des équations du mouvement au voisinage des parois	30
III,2.1 — Principe	30
III,2.2 — Formulation du problème pour les grands nombres de Reynolds	31
III,3 — Résolution de l'équation biharmonique $\Delta\Delta\psi = 0$, telle que $\partial\psi/\partial x = \partial\psi/\partial y = 0$ sur les deux faces d'un dièdre	33
III,3.1 — Formulation générale	33

III,3.2 – Recherche des solutions	35
III,3.2.1 – Cas où l'angle α est quelconque	36
III,3.2.2 – Cas de la plaque plane	39
III,3.2.3 – Cas de la plaque semi-infinie	41
III,3.2.4 – Plaque de dimension finie	42



DEUXIÈME PARTIE

Application aux écoulements à grand nombre de Reynolds.

CHAPITRE IV : Comportement local d'une couche limite ; bord d'attaque ; point anguleux ; bord de fuite	45
IV,1 – Problème du bord d'attaque	45
IV,1.1 – Description fluide parfait - couche limite	45
IV,1.2 – Voisinage du bord d'attaque	46
IV,2 – Bord d'attaque anguleux	54
IV,3 – Étude locale des équations de la couche-limite	56
IV,3.1 – Singularité artificielle : La ligne $\mathcal{D}_1$ ne présente aucune singularité pour la solution ψ_2	56
IV,3.2 – Il existe, sur la ligne $\mathcal{D}_1$, une singularité ponctuelle à la paroi	57
IV,3.3 – $\mathcal{D}_1$ est une ligne singulière	58
IV,4 – Problème du bord de fuite	64
IV,4.1 – Description fluide parfait - couche limite	64
IV,4.2 – Présence d'une singularité ponctuelle	65
IV,4.3 – Hypothèse d'une singularité normale	66
IV,4.4 – Interprétation des solutions "interne" et "externe" de Goldstein	68
IV,4.5 – Étude de la solution dans la région Navier-Stokes	70
CHAPITRE V : Décollement en un point de courbure finie	71
V,1 – Généralités	71
V,2 – Étude locale du point de séparation	71
V,2.1 – Comportement des solutions de couche limite	71
V,2.2 – Comportement des solutions des équations de Navier-Stokes	73
V,2.3 – Comportement des solutions des équations d'Euler	75
V,3 – Description de l'écoulement limite pour $R \rightarrow \infty$	75
V,3.1 – Cas de la solution régulière de couche limite	76
V,3.2 – Cas de la solution singulière de couche limite	79
V,4 – Quelques remarques sur le problème du décollement et conclusion	80
CHAPITRE VI : Écoulement décollé à grand nombre de Reynolds ; Sillage	83
VI,1 – Introduction	83

VI,2 – Sillage fermé de dimensions finies lorsque $R \rightarrow \infty$	83
VI,2.1 – Équation valable dans la zone de remous	83
VI,2.2 – Étude de la solution de fluide parfait	85
VI,2.3 – Description de l'écoulement limite	87
VI,3 – Généralisation au cas d'une couche limite épaisse	89
VI,3.1 – Description de l'écoulement pour $0 \leq \tau < 3/[2(\alpha_{CL} + 2)]$	89
VI,3.2 – Description de l'écoulement pour $\tau > 3/[2(\alpha_{CL} + 2)]$	90
VI,4 – Conclusion	91



TROISIÈME PARTIE

Application aux écoulements à faible nombre de Reynolds.

CHAPITRE VII : Écoulement à faible nombre de Reynolds autour d'un cylindre circulaire	97
VII,1 – Introduction	97
VII,1.1 – Généralités sur les écoulements à faible nombre de Reynolds	97
VII,1.2 – Plan des chapitres VII et VIII	98
VII,2 – Emploi de la méthode des développements asymptotiques raccordés	98
VII,2.1 – Résultats des travaux de Proudman et Pearson et de Kaplun et Lagerström	98
VII,2.2 – Calcul des termes d'ordre $R (\log R)^{-n}$: Influence des termes d'inertie dans le développement de Stokes	101
VII,2.2.1 – Calcul du développement de Stokes	101
VII,2.2.2 – Calcul du développement d'Oseen	102
VII,2.2.3 – Raccord des deux développements	103
VII,2.3. – Conclusion	108
VII,3 – Emploi d'un paramètre artificiel : écoulement autour d'un ellipsoïde	109
VII,3.1 – Pose du problème	109
VII,3.2 – Première approximation de l'écoulement	110
VII,3.3 – Seconde approximation au voisinage de l'ellipsoïde	114
VII,3.4 – Conclusion	115
CHAPITRE VIII : Écoulement à faible nombre de Reynolds autour d'une plaque plane	117
VIII,1 – Forme générale des écoulements de Stokes autour d'une plaque plane	117
VIII,2 – Écoulement, uniforme à l'infini, autour d'une plaque plane	120
VIII,2.1 – Généralités	120
VIII,2.2 – Solution uniformément valable	120
VIII,2.3 – Solution du type Stokes-Oseen	122
CONCLUSION GÉNÉRALE	125
ANNEXES	127
RÉFÉRENCES	160

ANNEXES

Annexes au chapitre II

Planche I — Formes simplifiées des équations de Navier-Stokes	127
Planche II — Singularité ponctuelle	128
Planche III — Singularité tangentielle	129
Planche IV — Singularité normale	130

Annexe au chapitre III

Propriétés utilisées pour les fonctions analytiques	131
---	-----

Annexe au chapitre V

Nombre de lignes de séparation au voisinage de l'origine	134
--	-----

Annexes au chapitre VII

VII,1 — Calculs des fonctions $\Delta\Psi_2$ et Ψ_2	137
VII,2 — Comportements de Ψ_1 , Ψ_2 , et Φ_0	143
VII,3 — Solution d'Oberbeck pour l'écoulement de Stokes autour d'un ellipsoïde	146
VII,4 — Passage des coordonnées sphériques aux coordonnées semi-polaires et cartésiennes	148
VII,5 — Formulation des problèmes liés à la seconde approximation de l'écoulement autour d'un ellipsoïde	150

Annexes au chapitre VIII

Résolution du problème aux limites pour les fonctions A'' , B'' , C'' , D''	153
Planches VIII,1 à VIII,9. Ecoulement autour d'une plaque plane pour diverses incidences	156

S

RÉSUMÉ

Ce travail, basé essentiellement sur l'emploi des méthodes de perturbation, est consacré à l'étude des écoulements bidimensionnels et laminaires d'un fluide visqueux incompressible lorsque le nombre de Reynolds tend soit vers zéro, soit vers l'infini.

On étudie d'abord systématiquement les formes limites possibles des équations de Navier-Stokes et les conditions de raccord entre deux domaines contigus décrits par des approximations distinctes, ainsi que le comportement des solutions au voisinage des parois.

L'ensemble des résultats obtenus est ensuite appliqué à divers problèmes plus ou moins liés aux phénomènes de séparation : structure de l'écoulement et singularités au voisinage d'un bord d'attaque, d'un bord de fuite, d'un point anguleux ; décollement de la couche limite laminaire ; sillage fermé au grands nombres de Reynolds. Écoulement à faible nombre de Reynolds autour d'un cylindre circulaire et d'une plaque plane.

Une conclusion regroupe enfin les principaux résultats obtenus au sujet de ces problèmes

Mots-clés (thésaurus CEDOCAR) : Écoulement laminaire – Écoulement bidimensionnel – Écoulement incompressible – Écoulement visqueux – Équation Navier-Stokes – Couche limite – Nombre Reynolds – Théorie perturbations – Séparation – Méthodes asymptotiques.

ON THE USE OF PERTURBATION METHODS FOR THE STUDY OF LAMINAR FLOWS. APPLICATION TO SEPARATION PROBLEMS

by
Claude FRANÇOIS

SUMMARY

This work is devoted to the study of two-dimensional, laminar and incompressible viscous flows, when the Reynolds number tends either to zero or to infinity ; it is based essentially on the use of perturbation methods.

In the first part, the limiting forms of the Navier-Stokes equations, the matching conditions between two contiguous domains, and the asymptotic behaviour of the solutions near a wall, are studied systematically.

In the second and third parts, the results obtained are applied to several problems more or less related to separation phenomena, namely : flow configurations and singularities in the vicinity of a leading edge, of a trailing edge and of wedge ; laminar boundary layer separation ; base flow problem at high Reynolds number ; low Reynolds number flow past a circular cylinder and a flat plate.

The main results are summarized in a conclusion.

Key-words (NASA thesaurus) : Laminar flow – Two dimensional flow – Incompressible flow – Flow equations – Navier-Stokes equations – Viscous flow – Boundary layers – Boundary layer flow – Reynolds number – Perturbation theory – Boundary layer separation – Separated flow – Asymptotic methods.

Chapitre I

I, 1. — INTRODUCTION GÉNÉRALE.

Dans le cadre de la mécanique des milieux continus, les mouvements d'un fluide visqueux incompressible sont décrits par les équations de Navier-Stokes, auxquelles on joint l'équation de continuité qui exprime la conservation de la masse totale du fluide. On aboutit ainsi à un système d'équations aux dérivées partielles, non linéaires, dont la résolution s'avère extrêmement complexe, aussi bien du point de vue mathématique (théorèmes d'existence et d'unicité) que du point de vue pratique (représentation des solutions). De façon plus précise, on peut souligner les points suivants :

1 — On ne connaît qu'un nombre limité de solutions analytiques exactes. Une étude très complète de ces solutions est présentée dans la référence [3] et on peut constater que leur intérêt physique est relativement restreint car elles correspondent à des conditions limites souvent peu réalistes.

2 — Dans le cas du mouvement permanent et bidimensionnel autour d'un obstacle, le champ des vitesses étant donné à l'infini, il n'existe, à l'heure actuelle, aucun théorème d'existence ou d'unicité, si le nombre de Reynolds est quelconque. En particulier, pour les écoulements à très grands nombres de Reynolds qui seront examinés au chapitre VI, les solutions correspondant aux mouvements potentiels d'un fluide parfait paraissent des limites possibles, mais ce ne sont pas les seules et on ne dispose que de très peu de résultats mathématiques sur lesquels on puisse s'appuyer pour rechercher une représentation des solutions. Par contre pour les écoulements à très faible nombre de Reynolds des résultats positifs ont été obtenus, entre autres par LERAY [43] [44] et FINN [16] [17] [18]. Une revue très complète des divers travaux sur ce sujet peut être trouvée dans la référence [38].

On comprend, dans ces conditions, que la difficulté du problème posé par la représentation des solutions soit directement liée à la valeur du nombre de Reynolds et qu'il soit nécessaire, de toutes façons, de faire appel à des méthodes approchées. Celles-ci, que nous allons rappeler rapidement, peuvent être rangées en trois grandes classes : les méthodes numériques, l'utilisation de modèles mathématiques, enfin les méthodes asymptotiques telles que les méthodes de perturbation.

A. — Méthodes numériques.

Le développement récent des méthodes numériques et des moyens de calcul a permis d'obtenir, au cours des cinq dernières années, des résultats assez spectaculaires. Pour intéressante qu'elle soit, cette façon de procéder présente cependant un certain nombre d'inconvénients :

— Tout d'abord, le calcul s'avère en général long, donc coûteux, et l'obtention de la solution est de plus en plus pénible au fur et à mesure que croît le nombre de Reynolds. On peut dire qu'à l'heure actuelle, on ne sait pas calculer des écoulements visqueux à de grands nombres de Reynolds ($> 1\,000$ environ).

— Du point de vue pratique, un résultat de calcul numérique est assez semblable à celui d'une expérience et pose donc un problème d'interprétation dans lequel il est essentiel de tenir compte des erreurs introduites par la méthode de calcul. (Ce point est capital pour les écoulements à grand nombre de Reynolds).

— Enfin on voit mal comment un calcul numérique pourrait expliquer un phénomène ; Tout comme l'expérience, il ne peut guère que le constater et le mesurer.

Ce sont ces raisons qui ont fait écarter ici les méthodes numériques comme moyen d'investigation mais le recours à un tel procédé devient nécessaire dès l'instant où on veut des résultats quantitatifs, et a été utilisé par l'auteur par ailleurs [24].

B. — *Modèles mathématiques.*

L'utilisation de modèles mathématiques est un procédé très intéressant et finalement assez répandu pour étudier un phénomène déterminé. Il consiste à remplacer l'équation à étudier par une autre, plus simple, mais qui en conserve les caractères essentiels. A l'inverse des méthodes numériques, ce mode de raisonnement ne permet pas d'obtenir des résultats *quantitativement* exacts, mais sert directement à la *compréhension qualitative* des phénomènes.

A titre d'exemple, on peut schématiser l'influence des termes d'inertie dans un écoulement à faible nombre de Reynolds par l'utilisation d'une forme linéarisée des équations (équation d'Oseen par exemple). De la même façon, il est classique d'étudier le caractère parabolique des équations de la couche limite en les remplaçant par l'équation de la chaleur. Signalons que, dans ce cas précis, l'auteur a montré dans les références [19] et [20] que ce modèle représente en fait le comportement asymptotique réel des équations complètes au voisinage de la région de fluide parfait*. Nous aurons d'ailleurs l'occasion, au chapitre V, de montrer comment l'utilisation d'un modèle linéaire dû à J.P. GUIRAUD, permet d'apporter des renseignements intéressants sur le problème de la séparation laminaire [30].

C. — *Méthodes asymptotiques. Méthodes de perturbation.*

Les méthodes asymptotiques, dans leur sens le plus large, sont utilisées depuis longtemps et peuvent prendre des aspects très divers. Leur point commun est de nécessiter la présence d'une quantité petite (ou grande) dans les équations ou les conditions limites.

L'application la plus simple et la plus courante des méthodes asymptotiques consiste à les utiliser pour faire des *études locales*, la quantité petite étant alors une *variable*. Nous les utiliserons dans ce sens à plusieurs reprises, en particulier dans le chapitre III.

Afin d'étendre le champ d'application de ce procédé, de nombreux auteurs ont tenté, souvent avec succès, de "raccorder" entre elles plusieurs études locales en vue d'obtenir une représentation globale de l'écoulement. On peut citer comme exemple les travaux de Goldstein sur les solutions de couche limite au voisinage d'un point singulier [26] [27]. On sait qu'un tel traitement est criticable, la raison essentielle étant *qu'on n'a pas le droit de dériver un développement asymptotique par rapport à la quantité petite* (cf. par exemple ERDELYI [15]). Il s'ensuit donc qu'on ne pourra légitimer un tel développement que si la quantité petite intervient comme un *paramètre* dans les équations, et non comme une *variable*. KAPLUN et LAGERSTRÖM [33] ainsi que VAN DYKE [62] insistent sur ce point qui les amène à définir des "coordinate type expansions" et des "parameter type expansions". Par définition, nous nommerons "*méthode de perturbation*" toute méthode consistant à rechercher la solution sous forme de développement asymptotique où la quantité petite est un *paramètre*.

Ces méthodes ont d'abord été utilisées au sens de "*petites perturbations*" c'est-à-dire dans les cas où la solution de l'équation initiale tend uniformément, lorsque le petit paramètre ϵ tend vers zéro, vers la solution de l'équation limite, obtenue en faisant $\epsilon = 0$. Physiquement ceci signifie que le petit paramètre a , dans tout le domaine étudié, des effets petits.

* Ce résultat, valable aussi bien pour un fluide compressible qu'incompressible, et quels que soient le gradient de pression extérieur, le nombre de Mach, et le nombre de Prandtl, a été obtenu par linéarisation des équations au voisinage de la région non visqueuse. Il a été mathématiquement justifié depuis, sur les équations non linéaires et dans le cas incompressible par Oleinik.

Il est apparu que très souvent cette convergence uniforme n'est pas réalisée ; on dit alors que l'on est en présence d'une "*perturbation singulière*".

Il existe divers méthodes d'étude des perturbations singulières, la première étant due, sans doute, à Poincaré, mais nous ne parlerons, dans toute la suite, que de celle qui est apparue comme la plus fructueuse, à savoir la méthode des "*développements asymptotiques raccordés*", proposée par KAPLUN et LAGERSTRÖM, et exposée en détail dans les références [10] et [62].

I, 2. — BUT ET PLAN DU PRÉSENT TRAVAIL.

La méthode des développements asymptotiques raccordés se prête particulièrement bien à l'étude des mouvements bidimensionnels et permanents d'un fluide visqueux incompressible, pour lesquels l'analyse dimensionnelle classique permet de définir un paramètre adimensionnel unique, à savoir le nombre de Reynolds R .

Nous nous intéresserons donc, dans ce travail, à la recherche des solutions limites des équations de Navier-Stokes dans les deux cas, effectivement du ressort des méthodes de perturbation, où le nombre de Reynolds tend soit vers zéro, soit vers l'infini.

De façon plus précise, nous distinguerons trois parties :

A. — Dans la première partie, qui comprend les chapitres II et III, sont présentés des résultats applicables aux deux cas limites que nous venons de mentionner.

— Le chapitre II a pour but de préciser les formes asymptotiques possibles des équations de Navier-Stokes et les conditions de raccord entre deux domaines contigus, afin d'éviter au maximum les tâtonnements inhérents à la méthode des développements asymptotiques raccordés :

On sait en effet que le principe de cette méthode est de subdiviser l'écoulement en plusieurs domaines, notés par le symbole $\mathcal{D}$, et d'affirmer que, dans chacun d'eux, il existe une normalisation particulière des fonctions et variables telle que celles-ci, ainsi que leurs dérivées, restent d'ordre unité dans $\mathcal{D}$ lorsque le petit paramètre tend vers zéro. Ce choix des échelles caractéristiques est essentiel puisqu'il définit à la fois les dimensions du domaine $\mathcal{D}$ et le type d'équation à résoudre dans $\mathcal{D}$. Malheureusement, il n'existe pas, à l'heure actuelle, de procédés systématiques pour définir ces échelles, et, pour chaque problème particulier, on est naturellement conduit à des tâtonnements dans lesquels l'intuition physique joue d'ailleurs un rôle important. Le but de ce chapitre est d'énoncer quelques règles générales pour réduire l'importance de ces tâtonnements.

— Le chapitre III est consacré à une étude asymptotique des équations de Navier-Stokes au voisinage d'une paroi, l'hypothèse de base étant que les termes convectifs des équations du mouvement sont négligeables devant les termes dissipatifs lorsque la vitesse tend vers zéro. C'est le seul chapitre qui ne fait pas appel aux méthodes de développements raccordés.

Toute la suite, c'est-à-dire les parties II et III sont des applications de ces chapitres aux deux cas particuliers des écoulements à très faible et très grand nombres de Reynolds. D'après ce que nous avons dit à propos des connaissances mathématiques des équations de Navier-Stokes, on peut s'attendre à ce que les résultats présentés ne soient pas de même nature dans les deux cas limites et nous allons maintenant les préciser.

B. — Dans la deuxième partie, on envisage le cas limite des nombres de Reynolds croissant indéfiniment.

Dans cette hypothèse, nous cherchons avant tout à définir la structure de l'écoulement limite, sans résoudre effectivement le problème dans chaque domaine. Ce résultat sera obtenu essentiellement par application du chapitre II, tandis que le chapitre III permettra de préciser, par des études locales, la nature des singularités des solutions.

De façon plus concrète, la plupart des applications concernent les problèmes de *séparation*, c'est-à-dire, par définition, les écoulements dans lesquels il existe une ligne de courant et une seule, autre que la paroi, issue d'un point de celle-ci. C'est ainsi qu'on sera amené, dans le chapitre IV, à examiner les problèmes du bord d'attaque et du bord de fuite, tandis que le chapitre V est consacré à l'étude locale du décollement de la couche limite laminaire en un point de la paroi de courbure finie. Enfin le chapitre VI traite de la recherche des solutions limites des équations de Navier-Stokes, dans le cas où il existerait, à la limite $R \rightarrow \infty$, une zone de remous fermée.

C. — *La troisième partie* rassemble deux exemples d'application pour les écoulements à faible nombre de Reynolds : Le cylindre circulaire dans le chapitre VII, et la plaque plane de dimension finie dans le chapitre VIII.

Contrairement à ce que nous recherchions dans la deuxième partie, le but est ici d'obtenir effectivement une représentation globale de l'écoulement, ceci étant facilité, dans le cas des faibles nombres de Reynolds, par le fait que les équations sont linéaires et que la structure de l'écoulement, pour $R = 0$, est en général bien connue. Ceci nous amènera à rechercher une meilleure approximation de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire, à discuter le paradoxe de Stokes, et, dans le cas de la plaque plane, à préciser la nature des singularités au voisinage du bord d'attaque et du bord de fuite.

Enfin, une conclusion finale permettra de regrouper les principaux résultats obtenus à propos des phénomènes de séparation.

E

Première Partie

ÉTUDE ASYMPTOTIQUE DES ÉQUATIONS DE NAVIER - STOKES



Chapitre II

ÉTUDE GÉNÉRALE DES APPROXIMATIONS DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

II, 1. — POSE DU PROBLÈME.

Ainsi qu'on l'a déjà dit, on se limite ici à l'étude des écoulements bidimensionnels et stationnaires d'un fluide visqueux incompressible, autour d'un obstacle dont on désigne par L une dimension caractéristique ; on suppose de plus que le champ de l'écoulement est donné à l'infini amont et de vitesse caractéristique U_∞ . Enfin $R = U_\infty L/\nu$ désigne le nombre de Reynolds classique, ν étant la viscosité cinématique du fluide.

D'après les hypothèses faites, il existe une fonction de courant ψ telle que, u et v étant les composantes du vecteur vitesse $\vec{V}$ par rapport à deux axes de coordonnées rectangulaires Ox et Oy , on ait :

$$(1) \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

L'équation de continuité est alors automatiquement satisfaite et l'élimination de la pression entre les deux équations de Navier-Stokes conduit à l'équation suivante pour ψ :

$$(2) \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \psi) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\Delta \psi) = \nu \Delta (\Delta \psi)$$

dans laquelle Δ désigne le Laplacien habituel.

Remarquons encore que le tourbillon $\vec{\Omega} = 1/2 \text{ rot } \vec{V}$ a pour module :

$$(3) \quad \Omega = -1/2 \Delta \psi.$$

Si on choisit pour origine des ψ la ligne de courant confondue avec l'obstacle, le problème global revient à chercher la (ou les) solution(s) de l'équation (2) telle(s) que ψ soit connu à l'infini amont et que ψ et sa dérivée normale $\partial \psi / \partial n$ soient nuls sur l'obstacle (condition d'adhérence du fluide à la paroi).

II, 2. — NON-DIMENSIONNALISATION DES FONCTIONS ET VARIABLES.

Comme dans toute méthode de perturbation, l'hypothèse de base consiste à affirmer que l'on peut toujours subdiviser l'écoulement en plusieurs domaines, désignés par $\mathcal{D}$, et que, dans chacun d'eux, il existe une normalisation particulière des fonctions et variables telle que toutes ces grandeurs adimensionnées et leurs dérivées successives restent d'ordre unité dans $\mathcal{D}$. Dans notre cas particulier, si on désigne par L_x et L_y les dimensions caractéristiques de $\mathcal{D}$ selon Ox et Oy , (par le choix des axes, on peut toujours poser $L_y \leq L_x$), et par ψ_0 l'ordre de grandeur de ψ dans $\mathcal{D}$, on est conduit à poser :

$$(4) \quad \bar{x} = \frac{x}{L_x}, \quad \bar{y} = \frac{y}{L_y}, \quad \bar{\psi} = \frac{\psi}{\psi_0}.$$

Les ordres de grandeur des vitesses et tourbillons sont alors des conséquences des formules (1) et (3) :

$$u_0 = \frac{\psi_0}{L_y} , \quad v_0 = \frac{\psi_0}{L_x} , \quad \Omega_0 = \frac{\psi_0}{L_y^2} .$$

Introduisons maintenant les trois paramètres adimensionnels suivants :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta = \frac{L_x}{L} , \text{ qui caractérise les dimensions relatives de } \mathcal{D} \text{ et de l'obstacle} \\ \lambda = \frac{L_y}{L_x} \leq 1 \text{ qui caractérise la forme géométrique de } \mathcal{D} \\ \epsilon = \frac{\nu}{\lambda \psi_0} = \frac{1}{\lambda R} \frac{U_\infty L}{\psi_0} \text{ qui peut être considéré comme l'inverse d'un nombre de Reynolds généralisé.} \end{array} \right.$$

Il est clair que ces trois paramètres permettent de relier les divers ordres de grandeur dans $\mathcal{D}$ aux conditions à l'infini et à la dimension caractéristique L de l'obstacle. On obtient ainsi :

$$(6a) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_x = \theta L , \quad L_y = \lambda \theta L \\ u_0 = \frac{1}{\epsilon \lambda^2 \theta R} U_\infty , \quad v_0 = \frac{1}{\epsilon \lambda \theta R} U_\infty \\ \psi_0 = \frac{1}{\epsilon \lambda R} L U_\infty , \quad \Omega_0 = \frac{1}{\epsilon \lambda^3 \theta^2 R} \frac{U_\infty}{L} . \end{array} \right.$$

Il est facile d'en déduire l'ordre de grandeur de la pression :

$$(6b) \quad p_0 = \rho_\infty U_\infty^2 \text{ Max } \left\{ \frac{1}{\epsilon^2 \lambda^4 \theta^2 R^2} , \frac{1}{\epsilon \lambda^4 \theta^2 R^2} \right\} .$$

La normalisation étant désormais bien définie, les équations (1), (2), (3) deviennent, sous forme adimensionnelle :

$$(5) \quad \bar{u} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} , \quad \bar{v} = - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}}$$

$$(6) \quad \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \right) \left(\lambda^2 \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{y}^2} \right) = \epsilon \left(\lambda^4 \frac{\partial^4 \bar{\psi}}{\partial \bar{x}^4} + 2 \lambda^2 \frac{\partial^4 \bar{\psi}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^4 \bar{\psi}}{\partial \bar{y}^4} \right)$$

$$(7) \quad \bar{\Omega} = -1/2 \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{x}^2} .$$

II, 3. — FORMES SIMPLIFIÉES POSSIBLES DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES.

On se propose de rechercher la solution $\bar{\psi}$ sous forme d'un développement asymptotique de la forme :

$$(8) \quad \bar{\psi} = \bar{\psi}^{(0)} + f_1(\epsilon, \lambda, \theta) \bar{\psi}^{(1)} + f_2(\epsilon, \lambda, \theta) \bar{\psi}^{(2)} + \dots$$

Les fonctions f_1 , f_2 ... etc, ne sont pas précisées, mais constituent une séquence asymptotique bien ordonnée. Elles ne dépendent que des petits paramètres du problème. Il est donc sous-entendu, dans l'écriture (8), que l'on supprimera la dépendance des f_n par rapport à ceux des paramètres ϵ , λ ou θ qui seraient éventuellement d'ordre unité.

Nous ne cherchons pas ici à résoudre le problème complet c'est-à-dire à déterminer les $\bar{\psi}^{(n)}$ et f_n , mais nous nous posons seulement la question suivante : En fonction des ordres de grandeur des paramètres ϵ , λ , θ , comparés à l'unité, de quelle équation $\bar{\psi}^{(0)}$ est-il solution ? Ceci signifie que nous nous intéressons aux formes simplifiées possibles des équations de Navier-Stokes pour la première approximation $\bar{\psi}^{(0)}$ de $\bar{\psi}$ dans $\mathcal{D}$.

Il est clair tout d'abord que le paramètre θ , n'intervenant pas explicitement dans (6), ne joue aucun rôle dans cette question, ce qui permet d'énoncer le résultat ci-dessous :

Proposition 1.

Les équations de Navier-Stokes ne dépendent que de deux paramètres adimensionnels λ et ϵ . Il en résulte que la détermination des formes simplifiées possibles de ces équations est indépendante du paramètre θ qui caractérise les dimensions relatives du domaine $\mathcal{D}$ étudié et de l'obstacle.

II, 3. 1. – *Mouvements à contraintes visqueuses prépondérantes* ($\epsilon \gg 1$)

Deux cas sont à envisager selon l'ordre de grandeur de λ qui, rappelons-le, est toujours inférieur ou égal à l'unité, d'après le choix des axes.

a) $\lambda = 1$ (Domaine géométriquement bidimensionnel).

L'équation (6) montre que $\bar{\psi}_0$ est alors solution de l'équation biharmonique (9) :

$$(9) \quad \bar{\Delta} \bar{\Delta} \bar{\psi}^{(0)} = 0.$$

Ce cas est, en particulier, celui des écoulements à faible nombre de Reynolds. Mais il faut remarquer dès maintenant, car nous l'utiliserons plus loin, qu'il n'est pas nécessaire que R soit petit pour aboutir à l'équation (9). Il suffit seulement, d'après l'expression de ϵ que :

$$\psi_0 \ll \frac{LU_\infty}{R}$$

Dans la suite, l'équation (9) sera désignée par "équation de Stokes bidimensionnelle", ou, en abrégé S.2D.

b) $\lambda \ll 1$ (Domaine géométriquement unidimensionnel).

L'équation (6) se réduit alors à :

$$(10) \quad \frac{\partial^4 \bar{\psi}^{(0)}}{\partial \bar{y}^4} = 0$$

d'où l'expression de $\bar{\psi}_0$:

$$(11) \quad \bar{\psi}^{(0)} = a_0(\bar{x}) + a_1(\bar{x})\bar{y} + a_2(\bar{x})\bar{y}^2 + a_3(\bar{x})\bar{y}^3.$$

Pour retrouver l'équation (10), il faut et il suffit que $\psi_0 \ll \frac{LU_\infty}{\lambda R}$ et (10) sera désignée, dans la suite "équation de Stokes unidimensionnelle" (en abrégé S.1D).

II, 3. 2. – *Mouvements à contraintes visqueuses négligeables* ($\epsilon \ll 1$)

a) $\lambda = 1$.

En première approximation on obtient :

$$\left(\frac{\partial \bar{\psi}^{(0)}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{\psi}^{(0)}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \right) (\bar{\Delta} \bar{\psi}^{(0)}) = 0 .$$

Cette équation peut s'intégrer une fois puisque l'opérateur du premier membre représente une dérivée particulière. Il vient ainsi :

$$(12) \quad \bar{\Delta} \bar{\psi}^{(0)} = F(\bar{\psi}^0) .$$

C'est la forme classique des équations d'Euler, le tourbillon $\bar{\Omega}$ étant constant sur chaque ligne de courant, (12) sera désignée, en abrégé, par E.2D

b) $\lambda \ll 1$.

Le résultat est tout à fait analogue, puisqu'il suffit de négliger dans l'expression du Laplacien les dérivées par rapport à $\bar{x}$.

$$(13) \quad \frac{\partial^2 \bar{\psi}^0}{\partial \bar{y}^2} = F(\bar{\psi}^0) .$$

L'équation (13) sera dénommée "équation d'Euler unidimensionnelle", ce qui ne signifie pas, d'ailleurs, que sa solution soit indépendante de la variable $\bar{x}$. (en abrégé E.1D).

II, 3. 3. — Mouvements visqueux classiques ($\epsilon = 1$).

Ces mouvements sont caractérisés par le fait que les termes de viscosité et les termes d'inertie sont du même ordre de grandeur dans $\mathcal{D}$ ($\epsilon = 1$) .

a) $\lambda = 1$.

Il n'y a alors visiblement aucune simplification possible de l'équation (6) ; $\psi^{(0)}$ est solution de l'équation de Navier-Stokes complète (14) (En abrégé : N-S)

$$(14) \quad \left(\frac{\partial \bar{\psi}^{(0)}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{\psi}^{(0)}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \right) (\bar{\Delta} \bar{\psi}^{(0)}) = \bar{\Delta} \bar{\Delta} \bar{\psi}^{(0)} .$$

Remarquons que dans ce cas, les formules (6a) nous conduisent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_0 = \frac{L U_\infty}{R} = \nu \\ u_0 = \frac{U_\infty}{\theta R} = \frac{\nu}{\theta L} = \nu_0 \\ L_x = L_y = \theta L \end{array} \right.$$

d'où il ressort que :

$$u_0 L_x = \nu$$

(6.b) nous montre de plus que $p_0 = (\rho_\infty U_\infty^2) / (\theta^2 R^2)$. On peut donc en déduire les résultats suivants :

Proposition 2.

|| Pour les fluides faiblement visqueux ($\nu \rightarrow 0$), les domaines $\mathcal{D}$ où doivent être retenues les équations de

Navier-Stokes complètes sont nécessairement de très petites dimensions, ou à très faibles vitesses caractéristiques, le produit de ces deux quantités étant égal à ν .

Proposition 3.

Si on impose de plus à la pression de rester finie lorsque le nombre de Reynolds tend vers l'infini il en résulte que $\theta = 1/R$, donc $L_x = L_y = L/R = \nu/U_\infty$ et $u_0 = v_0 = U_\infty$.

Des propositions (2) et (3), on déduit la proposition (4).

Proposition 4.

Pour des écoulements à grand nombre de Reynolds un domaine $\mathcal{D}$ de dimension finie où la pression reste finie lorsque $R \rightarrow \infty$, n'est pas décrit, en première approximation par les équations de Navier-Stokes complètes.

Remarquons que ce dernier résultat est vrai à fortiori pour les mouvements à contraintes visqueuses prépondérantes ($\epsilon \gg 1$) décrits par les équations de Stokes.

b) $\lambda \ll 1$

L'équation pour $\bar{\psi}^{(0)}$ s'écrit sous la forme

$$\left(\frac{\partial \bar{\psi}^{(0)}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{\psi}^{(0)}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \right) \left(\frac{\partial^2 \bar{\psi}^{(0)}}{\partial \bar{y}^2} \right) = \frac{\partial^4 \bar{\psi}^{(0)}}{\partial \bar{y}^4}.$$

Le premier membre étant une dérivée partielle exacte par rapport à y , on peut intégrer une fois l'équation pour obtenir le résultat (15) :

$$(15) \quad \frac{\partial \bar{\psi}^{(0)}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{\psi}^{(0)}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{\psi}^{(0)}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{\psi}^{(0)}}{\partial \bar{y}^2} = \frac{\partial^3 \bar{\psi}^{(0)}}{\partial \bar{y}^3} + F(\bar{x}).$$

On reconnaît, sous cette forme, les équations de la couche limite laminaire établies par Prandtl, la fonction $F(\bar{x})$ représentant, dans le cas de la couche-limite le gradient de pression extérieur. (15) sera dénommé, en abrégé, par C.L.

II, 3. 4. — *Conclusion.*

De l'étude précédente, il résulte les conclusions suivantes :

Proposition 5.

En première approximation, quels que soient le nombre de Reynolds et le domaine $\mathcal{D}$ étudié, la fonction de courant $\bar{\psi}$ est solution des équations d'Euler ($\epsilon \ll 1$), de Stokes ($\epsilon \gg 1$), de Prandtl ($\epsilon = 1, \lambda \ll 1$) ou de Navier-Stokes ($\epsilon = \lambda = 1$). Il n'existe pas d'autres formes limites.

On en déduit, entre autres, que les équations d'Oseen, utilisées souvent pour décrire un mouvement en première approximation, ne constituent qu'un modèle et ne peuvent, en aucun cas, être considérées comme une limite asymptotique des équations de Navier-Stokes.

L'ensemble des résultats obtenus est résumé dans le tableau de la planche 1. Ils ont déjà été présentés dans la référence [22].

II, 4. — CONDITIONS DE RACCORD ENTRE DEUX DOMAINES DÉCRITS PAR DES APPROXIMATIONS DISTINCTES.

II, 4. 1. — Généralités.

Nous envisageons maintenant le problème suivant :

Etant données deux expressions $\bar{\psi}_1$ et $\bar{\psi}_2$ de la première approximation $\bar{\psi}^{(0)}$ de $\bar{\psi}$ dans deux domaines contigus distincts $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, quelles sont les relations entre les valeurs des paramètres $\lambda, \theta, \epsilon$ dans les deux domaines ?

Pour répondre à cette question, nous nous plaçons dans le cadre maintenant classique [10] [33] [62] de la méthode des développements asymptotiques raccordés. Nous affectons de l'indice 2 toute quantité liée à la solution "extérieure" (ou "distale"), valable dans le domaine $\mathcal{D}_2$, celle-ci cessant de représenter correctement l'écoulement au voisinage du domaine "intérieur" (ou "proximal") $\mathcal{D}_1$, où toutes les quantités seront indicées 1. Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de préciser ce que l'on entend par "cesse de représenter correctement l'écoulement" : Nous supposons que dans un domaine $\mathcal{D}_2$, nous disposons d'une représentation $\bar{\psi}_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ de la solution, obtenue à partir d'une des formes simplifiées des équations que l'on vient de mettre en évidence. Si $\bar{\psi}_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ vérifie toutes les conditions limites du problème à l'ordre d'approximation retenu, et si les termes négligés dans les équations de Navier-Stokes restent uniformément bornés dans tout le domaine $\mathcal{D}_2$, la solution $\bar{\psi}_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ représentera correctement l'écoulement en première approximation. Par contre, si une des conditions limites en un point, ou sur une ligne ne peut être satisfaite, ou si un des termes négligés dans les équations de départ ne reste pas borné au voisinage de certains points, ou de certaines lignes, on dira que $\bar{\psi}_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ ne représente pas correctement l'écoulement au voisinage de ces points ou lignes. Au voisinage de ces singularités, il sera nécessaire de retenir, dans les équations, les termes précédemment négligés qui ne restent pas bornés, si bien que l'on sera conduit à définir un domaine "intérieur" $\mathcal{D}_1$ où sera valable une autre représentation $\bar{\psi}_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ de la solution, obtenue au moyen d'une nouvelle normalisation. Nous n'insisterons pas ici sur le principe du raccordement des deux développements, ceci étant étudié en détail dans les références [33] et [62]. Rappelons seulement que ce raccord est basé sur l'idée qu'il existe une zone de recouvrement dite "domaine intermédiaire" où sont simultanément valables les deux représentations "intérieure" et "extérieure" de la solution.

II, 4. 2. — Classification des divers cas possibles ; choix des axes.

Deux grands cas sont tout d'abord à distinguer :

1) *Singularité ponctuelle* ($\lambda_1 = 1$).

Dans cette hypothèse la solution extérieure $\bar{\psi}_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ cesse de représenter correctement l'écoulement au voisinage d'un point O que l'on peut toujours choisir comme origine des coordonnées, les axes $O\bar{x}$ et $O\bar{y}$ étant eux-mêmes choisis de telle sorte que $\lambda_2 \leq 1$ (figure II, 1)

Vu à l'échelle (2), le domaine $\mathcal{D}_1$ est réduit à un point. Ses dimensions caractéristiques sont donc très petites devant la plus petite des dimensions de $\mathcal{D}_2$.

La singularité ponctuelle est ainsi caractérisée par :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \theta_1 \ll \lambda_2 \theta_2 \leq \theta_2 . \end{cases}$$

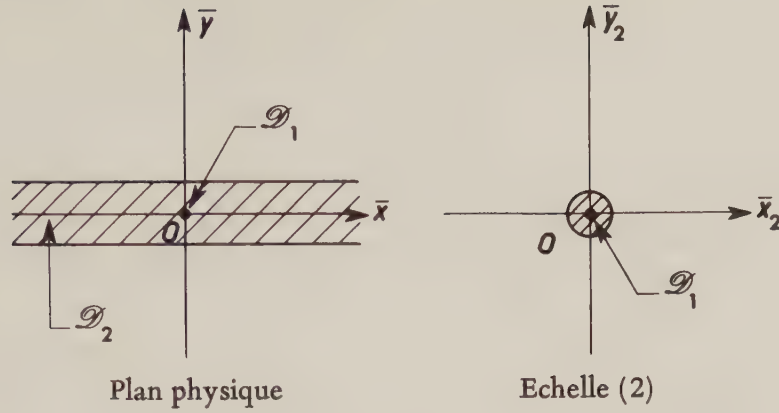


Figure II. 1
Singularité ponctuelle.

Pour écrire les conditions de raccord entre $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, il est nécessaire de connaître le comportement de la solution extérieure $\bar{\psi}_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ au voisinage du point O . Dans toute la suite, nous nous limiterons au cas le plus fréquent dans la pratique, où le comportement en question est de la forme (16)*.

$$(16) \quad \bar{\psi}_2 \sim A_2 \bar{x}_2^{\alpha_2} |\text{Log } \bar{x}_2|^{\alpha'_2} \bar{y}_2^{\beta_2} |\text{Log } \bar{y}_2|^{\beta'_2}$$

$A_2, \alpha_2, \alpha'_2, \beta_2, \beta'_2$ étant des constantes supposées connues.

2) Singularité curviligne.

Dans ce cas la solution extérieure est singulière le long d'une ligne, c'est-à-dire que, vu à l'échelle (2), le domaine $\mathcal{D}_1$ est une ligne. Nous envisagerons alors les deux possibilités suivantes.

a) Singularité tangentielle

Nous dirons que la singularité est tangentielle si le domaine $\mathcal{D}_1$ peut être assimilé localement à une ligne $\bar{y}_2 = 0$. On supposera alors que le comportement de $\bar{\psi}_2$ au voisinage de cette ligne est de la forme (17)

$$(17) \quad \bar{\psi}_2 \sim A_2 (\bar{x}_2) \bar{y}_2^{\beta_2} |\text{Log } \bar{y}_2|^{\beta'_2}.$$

On peut remarquer qu'on aura "singularité tangentielle" dans deux cas :

– ou bien $\lambda_2 = 1$, et il suffit alors de choisir les axes $O\bar{x}_2\bar{y}_2$ de telle sorte que la ligne singulière $\mathcal{D}_1$ soit localement l'axe $\bar{y}_2 = 0$ (cf. figure II, 2) On a alors :

$$\begin{cases} \lambda_2 = 1 \\ \theta_1 = \theta_2 \\ \lambda_1 \ll 1 \end{cases}$$

– ou bien $\lambda_2 \ll 1$, et à la limite $\lambda_2 \rightarrow 0$, la ligne singulière $\mathcal{D}_1$, vue à l'échelle du plan $O\bar{x}\bar{y}$ homothétique du plan physique ($\bar{x} = \bar{x}_2$, $\bar{y} = \lambda_2 \bar{y}_2$), vient se confondre avec la ligne singulière $\mathcal{D}_2$ (ou une portion de cette ligne) Il suffit alors de choisir l'axe $O\bar{x}_2$ localement tangent à cette ligne $\mathcal{D}_1$. Elle sera, en première approximation tangente à la ligne $\mathcal{D}_2$ et les deux inégalités $\lambda_1 \ll \lambda_2 \ll 1$ pourront être simultanément

* Un tel comportement est suggéré par l'étude de Kondrat'ev [37].

satisfaites dans le même système d'axes $O\bar{x}_2\bar{y}_2$ ainsi défini. (cf. figure II,3). On aura donc dans ces conditions

$$\begin{cases} \lambda_2 \ll 1 \\ \lambda_1 \ll \lambda_2 \\ \theta_1 = \theta_2 \end{cases}$$

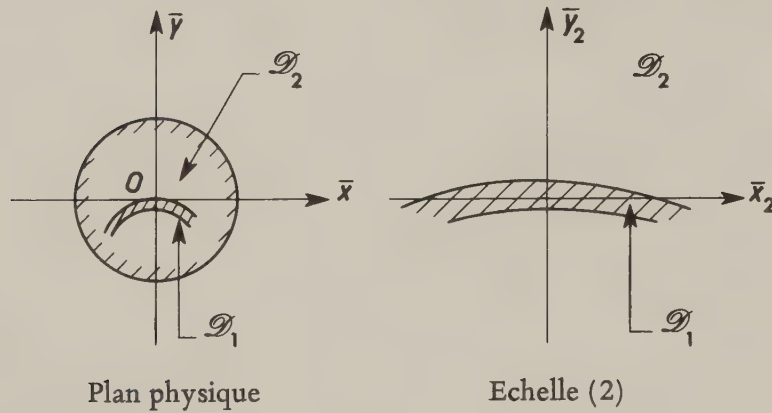


Figure II. 2
Singolarité tangentielle ; $\lambda_2 = 1$.

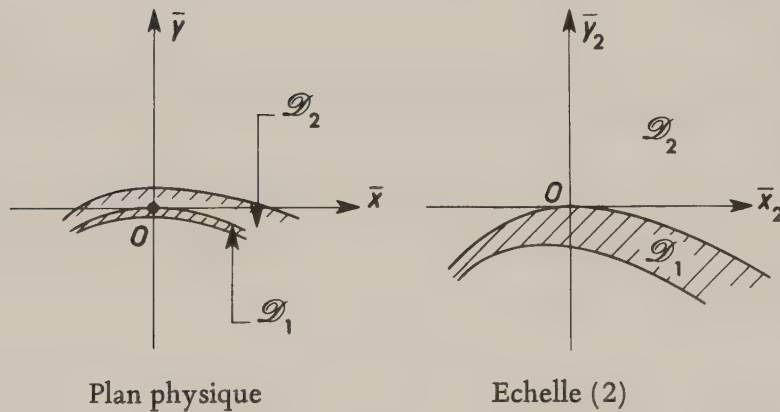


Figure II. 3
Singolarité tangentielle ; $\lambda_2 \ll 1$.

b) Singularité normale

Toujours dans le cas $\lambda_2 \ll 1$, le raisonnement fait ci-dessus et concernant le choix des axes $O\bar{x}_2\bar{y}_2$, tombe en défaut si, vue à l'échelle du plan $O\bar{x}\bar{y}$, la ligne $\mathcal{D}_1$ devient, à la limite, un point de $\mathcal{D}_2$. Ceci se produit si la plus grande des dimensions caractéristiques de $\mathcal{D}_1$ tend vers zero avec λ_2 , la tangente à la ligne $\mathcal{D}_1$, dans le plan $O\bar{x}\bar{y}$, faisant à la limite $\lambda_2 = 0$ un angle χ fini non nul avec la ligne $O\bar{x}$ tangente à la ligne limite $\mathcal{D}_2$. (cf. figure II, 4).

Dans ces conditions, la ligne $\mathcal{D}_1$, vue à l'échelle (2) est tangente à l'axe $O\bar{y}_2$. Ce cas sera dénommé "singularité normale" et, pour le traiter, on admettra que le comportement de $\bar{\psi}_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ au voisinage de la ligne singulière $\mathcal{D}_1$ est de la forme (18).

$$(18) \quad \bar{\psi}_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2) \sim B_2(\bar{y}_2) \bar{x}_2^{\alpha_2} |\text{Log } \bar{x}_2|^{\alpha'_2}$$

Remarquons que, dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} \lambda_2 &\ll 1 \\ \lambda_1 \theta_1 &= \lambda_2 \theta_2 \end{aligned}$$

De plus les axes $O\bar{x}_2\bar{y}_2$ étant inversés, pour le domaine $\mathcal{D}_1$, la condition $\lambda_1 \ll 1$ ne peut plus être satisfaite et doit être remplacée par $\lambda_1 \gtrsim 1$.

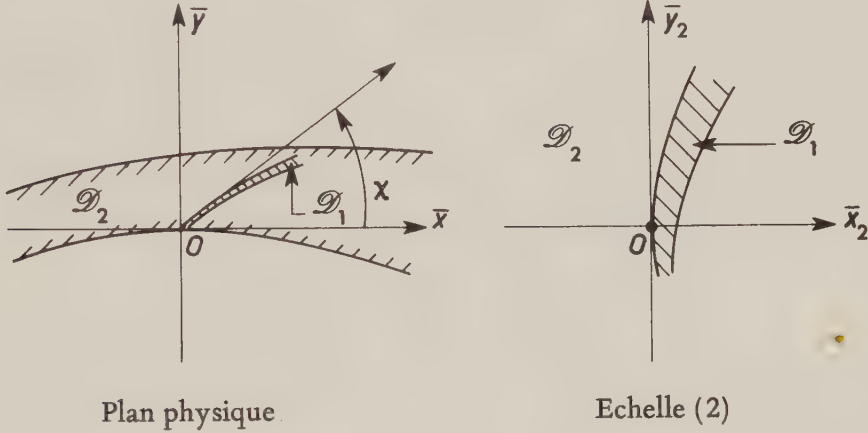


Figure II. 4
Singularité normale.

II, 4. 3. – Récapitulation et expression des conditions de raccord.

Tous les cas présentés peuvent être étudiés simultanément en considérant la seule singularité ponctuelle, mais sans tenir compte des limitations $\lambda_1 = 1$ et $\theta_1 \ll \theta_2$.

En effet on en déduira :

- le cas “ponctuel” en tenant compte de $\lambda_1 = 1$ et $\theta_1 \ll \theta_2$.
- le cas “tangential” en faisant, formellement $\alpha_2 = \alpha'_2 = 0$, $\theta_1 = \theta_2$ et $\lambda_1 \ll \lambda_2$.
- le cas “normal” en faisant $\beta_2 = \beta'_2 = 0$, $\lambda_1 \theta_1 = \lambda_2 \theta_2$ et $\lambda_2 \ll 1$, $\lambda_1 \gtrsim 1$.

Reprenons donc l'expression (16) du comportement de $\bar{\psi}_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$:

$$\bar{\psi}_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2) \sim A_2 \bar{x}_2^{\alpha_2} |\text{Log } \bar{x}_2|^{\alpha'_2} \bar{y}_2^{\beta_2} |\text{Log } \bar{y}_2|^{\beta'_2} + \dots$$

En tenant compte des normalisations dans les domaines $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ telles qu'elles sont définies par les formules (6a), il est facile d'obtenir l'expression $\bar{\psi}_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ représentant le comportement à l'infini (lorsque $\bar{x}_1, \bar{y}_1 \rightarrow \infty$) de $\bar{\psi}_1$:

$$\bar{\psi}_1 = \psi_2 \frac{\epsilon_1 \lambda_1}{\epsilon_2 \lambda_2} \quad , \quad \bar{x}_2 = \bar{x}_1 \frac{\theta_1}{\theta_2} \quad , \quad \bar{y}_2 = \bar{y}_1 \frac{\lambda_1 \theta_1}{\lambda_2 \theta_2}$$

$$\bar{\psi}_1 \sim A_2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\beta_2+1} \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} \right)^{\alpha_2+\beta_2} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} x_1^{\alpha_2} y_1^{\beta_2} |\text{Log } \bar{x}_1 + \text{Log } \frac{\theta_1}{\theta_2}|^{\alpha'_2} |\text{Log } \bar{y}_1 + \text{Log } \frac{\lambda_1 \theta_1}{\lambda_2 \theta_2}|^{\beta'_2} + \dots$$

En tenant compte du fait que, dans tous les cas on a soit $(\theta_1/\theta_2) \ll 1$, soit $(\lambda_1\theta_1/\lambda_2\theta_2) \ll 1$, on peut réordonner l'expression de $\bar{\psi}_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ sous la forme :

$$\bar{\psi}_1 \sim A_2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\beta_2+1} \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} \right)^{\alpha_2+\beta_2} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} |\text{Log} \frac{\theta_1}{\theta_2}|^{\alpha'_2} |\text{Log} \frac{\lambda_1\theta_1}{\lambda_2\theta_2}|^{\beta'_2} x_1^{\alpha_2} y_1^{\beta_2} + \dots$$

Or, $\bar{\psi}_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ est, par définition, d'ordre unité dans la zone de raccord (domaine de recouvrement des deux développements).

La condition de raccord s'écrit donc sous la forme :

$$(19) \quad \boxed{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\beta_2+1} \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} \right)^{\alpha_2+\beta_2} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} |\text{Log} \frac{\theta_1}{\theta_2}|^{\alpha'_2} |\text{Log} \frac{\lambda_1\theta_1}{\lambda_2\theta_2}|^{\beta'_2} = 1 .}$$

Si on se limite à des comportements purement algébriques de $\bar{\psi}_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ on est conduit à l'expression :

$$(20) \quad \boxed{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\beta_2+1} \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} \right)^{\alpha_2+\beta_2} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = 1 .}$$

Dans toute la suite, nous considérerons que le seul petit paramètre du problème, désigné par γ est soit le nombre de Reynolds R soit son inverse $1/R$

$$(21) \quad \gamma = \begin{cases} R & \text{si } R \ll 1 \\ \frac{1}{R} & \text{si } R \gg 1 \end{cases}$$

Il est alors commode, dans le cas des comportements algébriques purs, de poser :

$$(22) \quad \lambda = \gamma^p, \quad \theta = \gamma^q, \quad \epsilon = \gamma^r .$$

La condition (20) s'écrit alors sous la forme :

$$(23) \quad \boxed{(p_2 - p_1)(1 + \beta_2) + (q_2 - q_1)(\alpha_2 + \beta_2) + (r_2 - r_1) = 0 .}$$

On peut maintenant particulariser ces formules aux trois cas précédemment mis en évidence :

1) **Singularité ponctuelle** : $(\lambda_1 = 1, \theta_1 \ll \lambda_2\theta_2)$

$$(24.a) \quad \left(\frac{1}{\lambda_2} \right)^{\beta_2+1} \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} \right)^{\alpha_2+\beta_2} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} |\text{Log} \frac{\theta_1}{\theta_2}|^{\alpha'_2} |\text{Log} \frac{\theta_1}{\lambda_2\theta_2}|^{\beta'_2} = 1 \quad \text{avec} \quad \frac{\theta_1}{\lambda_2\theta_2} \ll 1$$

Comportement algébrique :

$$(24.b) \quad \left(\frac{1}{\lambda_2} \right)^{\beta_2+1} \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} \right)^{\alpha_2+\beta_2} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = 1 \quad \text{avec} \quad \frac{\theta_1}{\lambda_2\theta_2} \ll 1$$

ou :

$$(24.c) \quad p_2 (1 + \beta_2) + (q_2 - q_1) (\alpha_2 + \beta_2) + (r_2 - r_1) = 0 \quad \text{avec} \quad q_1 > p_2 + q_2$$

2) Singularité tangentielle. $(\theta_1 = \theta_2, \lambda_1 \ll \lambda_2, \alpha_2 = \alpha'_2 = 0)$

$$(25.a) \quad \begin{cases} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\beta_2+1} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} |\text{Log} \frac{\lambda_1}{\lambda_2}|^{\beta'_2} = 1 & \text{avec} \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \ll 1 \\ \theta_1 = \theta_2 \end{cases}$$

Comportement algébrique :

$$(25.b) \quad \begin{cases} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\beta_2+1} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = 1 & \text{avec} \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \ll 1 \\ \theta_1 = \theta_2 \end{cases}$$

ou :

$$(25.c) \quad \begin{cases} (p_2 - p_1) (1 + \beta_2) + (r_2 - r_1) = 0 \\ q_2 = q_1 & \text{avec} \quad p_1 > p_2 \end{cases}$$

3) Singularité normale $(\lambda_1 \theta_1 = \lambda_2 \theta_2, \lambda_2 \ll 1, \lambda_1 \gg 1, \beta_2 = \beta'_2 = 0)$

$$(26.a) \quad \begin{cases} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{1-\alpha_2} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} |\text{Log} \frac{\lambda_1}{\lambda_2}|^{\alpha'_2} = 1 \\ \lambda_1 \theta_1 = \lambda_2 \theta_2 & \text{avec} \quad \lambda_2 \ll 1 \text{ et } \lambda_1 \gg 1 \end{cases}$$

Comportement algébrique :

$$(26.b) \quad \begin{cases} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{1-\alpha_2} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = 1 \\ \lambda_1 \theta_1 = \lambda_2 \theta_2 & \text{avec} \quad \lambda_2 \ll 1 \text{ et } \lambda_1 \gg 1 \end{cases}$$

ou :

$$(26.c) \quad \begin{cases} (p_2 - p_1) (1 - \alpha_2) + (r_2 - r_1) = 1 \\ p_1 + q_1 = p_2 + q_2 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p_2 > 0 \\ p_1 \leq 0 \end{cases}$$

II, 4. 4. – Premières conséquences.

Avant d'étudier plus en détail les comportements de type purement algébriques, un certain nombre de résultats peuvent être obtenus dans les cas, plus généraux, des comportements du type (16), (17) ou (18).

Nous allons tout d'abord préciser quelques points de terminologie et énoncer un lemme, d'ailleurs fort simple.

Terminologie.

1) On dira qu'une équation est *valable*, dans un certain domaine $\mathcal{D}$, si, en première approximation, tous les termes qui apparaissent dans cette équation sont d'ordre unité dans $\mathcal{D}$. Si cette condition n'est pas satisfaite, on dira que l'équation n'est pas valable dans $\mathcal{D}$.

(Par exemple, on sera amené à dire que les équations de Navier-Stokes ne sont pas valables dans certains domaines, ce qui peut paraître choquant. Il faudra simplement se souvenir de la définition ci-dessus, qui, en l'occurrence, signifie que certains termes sont nécessairement d'un ordre inférieur, donc que les équations de Navier-Stokes doivent, en fait, se simplifier).

2) On dira qu'un schéma d'écoulement où apparaissent plusieurs domaines $\mathcal{D}$ est *cohérent* s'il est possible de satisfaire toutes les conditions de raccord entre deux (ou plusieurs) domaines contigus quelconques.

3) Dans le raccord entre deux domaines contigus, la solution extérieure (2) étant supposée complètement connue, on dira qu'il y a

– *Unicité*, si la condition de raccord permet de déterminer $\epsilon_1, \lambda_1, \theta_1$ et si les valeurs obtenues sont compatibles avec le type d'équation (E_1) valable dans $\mathcal{D}_1$.

– *Indétermination*, si elle conduit à une relation entre $\epsilon_1, \lambda_1, \theta_1$ compatible avec (E_1) .

– *Impossibilité*, si les valeurs obtenues pour $\epsilon_1, \lambda_1, \theta_1$, (ou la relation entre $\epsilon_1, \lambda_1, \theta_1$) sont incompatibles avec (E_1) .

4) Deux domaines $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont *distincts* si les équations valables dans $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont distinctes, ou si les valeurs d'un au moins des trois paramètres $\epsilon, \lambda, \theta$ sont différentes dans les deux domaines $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Lemme 1

|| α et β étant fixés, l'égalité $x^\alpha |\text{Log } x|^\beta = 1$ ne peut être satisfaite, lorsque x tend vers zéro ou croît indéfiniment, que si α et β sont simultanément nuls.

En terme d'ordres de grandeur, ce lemme peut s'énoncer sous la forme suivante :

|| Si α et β sont différents de zéro, l'équation $x^\alpha |\text{Log } x|^\beta = 1$ n'admet que des racines d'ordre unité.

Il est maintenant facile de démontrer les résultats ci-après.

Proposition 6.

|| Deux domaines Navier-Stokes distincts ne peuvent pas être contigus.

On peut interpréter ce résultat sous la forme suivante :

Si on doit retenir les équations de Navier-Stokes dans deux domaines contigus $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, les ordres de grandeur de toutes les quantités dans $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont les mêmes. En particulier les dimensions caractéristiques de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont identiques et les deux domaines en fait n'en forment qu'un seul.

Démonstration :

D'après II, 3. 3, deux domaines $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ décrits par les équations de Navier-Stokes sont tels que :

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

La condition de raccord (19) s'écrit alors :

$$\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{\alpha_2 + \beta_2} |\text{Log}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)|^{\alpha'_2 + \beta'_2} = 1.$$

Or $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ est, par hypothèse, très petit devant 1 et, plus précisément, tend vers zéro lorsque le petit paramètre γ tend vers zéro. L'application du lemme 1 montre alors que l'égalité ci-dessus ne peut, en général être satisfaite, ce qui démontre la proposition.

Le seul cas d'exception est celui où :

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 = 0 \\ \alpha'_2 + \beta'_2 = 0 . \end{cases}$$

Reprenant l'expression (16) du comportement de $\bar{\psi}_2$, en coordonnées polaires ρ, φ , ($\bar{x}_2 = \rho \cos \varphi$, $\bar{y}_2 = \rho \sin \varphi$), on obtient, lorsque $\rho \rightarrow 0$:

$$\bar{\psi}_2 \sim A_2 (\operatorname{tg} \varphi)^{\beta_2} + \dots$$

Or un tel comportement est incompatible avec le fait que $\bar{\psi}_2$ est solution des équations de Navier-Stokes, ainsi qu'on peut s'en assurer en recherchant, en coordonnées polaires, une solution indépendante de ρ .

La proposition 6 est donc démontrée dans tous les cas.

Proposition 7.

Dans le cas d'une singularité ponctuelle avec $\alpha_2 + \beta_2 > 0$, un domaine *extérieur* Navier-Stokes ne peut être contigu qu'avec un domaine intérieur de type Stokes bidimensionnel.

L'application de la condition de raccord (19) avec $\epsilon_2 = 1$ et $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, conduit en effet à :

$$\epsilon_1 = \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{-\alpha_2 - \beta_2} |\operatorname{Log} \frac{\theta_1}{\theta_2}|^{-\alpha'_2 - \beta'_2}$$

ce qui démontre la proposition, puisque $\frac{\theta_1}{\theta_2} \ll 1$ et $\alpha_2 + \beta_2 > 0$ entraînent $\epsilon_1 \gg 1$.

Remarque : l'hypothèse $\alpha_2 + \beta_2 > 0$ n'est pas très restrictive dans la pratique. Elle signifie, en effet, que l'on exclut les singularités du type source, tourbillon etc... pour lesquelles la fonction de courant $\bar{\psi}_2$ ne reste pas bornée au voisinage d'un point ; de telles singularités ne se rencontreront pas dans le problème qui nous occupe de l'écoulement autour d'un obstacle, la vitesse étant imposée à l'infini et ψ et sa dérivée normale étant nuls sur le corps. Si, par contre, on étudiait des écoulements plus complexes, en particulier avec injection de fluide, cette hypothèse devrait être revue.

Proposition 8.

Dans le cas d'une singularité tangentielle avec $\beta_2 + 1 > 0$, un domaine extérieur Navier-Stokes ne peut être contigu qu'avec un domaine intérieur de type Stokes unidimensionnel

C'est une conséquence immédiate de la condition de raccord (25a) lorsque $\epsilon_2 = \lambda_2 = 1$, puisqu'on obtient :

$$\epsilon_1 = (\lambda_1)^{-\beta_2 - 1} (\operatorname{Log} \lambda_1)^{-\beta'_2} .$$

Comme $\lambda_1 \ll 1$, on a bien $\epsilon_1 \gg 1$ si $\beta_2 + 1 > 0$.

Ici encore la condition $\beta_2 + 1 > 0$ n'est pas très restrictive. Pratiquement, on peut en effet s'attendre à ce que $\bar{\psi}_2$ reste borné au voisinage de la ligne singulière $\mathcal{D}_1$, c'est-à-dire que $\beta_2 > 0$. La condition $\beta_2 + 1 > 0$ est alors automatiquement satisfaite.

Des propositions 6, 7 et 8 on peut déduire le résultat final suivant :

Proposition 9.

Sous réserve des hypothèses $\alpha_2 + \beta_2 > 0$ et $\beta_2 + 1 > 0$, un domaine extérieur Navier-Stokes ne peut être contigu qu'avec un domaine intérieur de type Stokes unidimensionnel ou bidimensionnel. Il est, en particulier, incohérent d'envisager un schéma d'écoulement conduisant à l'existence d'un domaine Navier-Stokes à la frontière duquel existerait une couche limite ou une couche de mélange de type Prandtl.

Ce résultat sera appliqué, plus loin, dans l'étude des sillages.

Proposition 10.

Dans le cas d'une singularité tangentielle avec $\beta_2 + 1 > 0$, deux domaines distincts de type Prandtl ne peuvent pas être contigus.

C'est une conséquence du lemme 1 appliqué à la formule (25.a) dans le cas où $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$ et $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \ll 1$.

On peut encore énoncer le même résultat sous une autre forme en remarquant que, si $\epsilon_1 = 1$ et $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \ll 1$, nécessairement $\epsilon_2 \ll 1$ lorsque $\beta_2 + 1 > 0$:

Un domaine intérieur de type Prandtl ne peut être contigu qu'avec un domaine extérieur de type Euler.

On pourrait multiplier les conséquences des conditions de raccord (24. a), (25. a) et (26. a) : Il ne semble pas toutefois que ceci soit très utile, les plus importantes venant d'être signalées. Il est d'ailleurs facile, dans chaque cas particulier étudié, de reprendre ces conditions de raccord et d'en déduire quelques implications sur la solution cherchée.

II, 4. 5. – *Étude systématique des comportements algébriques.*

Dans les exemples qui seront traités au cours des chapitres suivants, il s'avère que tous les comportements des solutions extérieures $\bar{\Psi}_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ sont de type algébrique pur. Ce cas étant donc particulièrement fréquent il est intéressant de l'étudier systématiquement au moyen des formules (24. b, c), (25. b, c) et (26. b, c), en envisageant successivement tous les modes de description possibles de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. On obtient finalement un nombre de cas assez limité puisqu'on sait que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont nécessairement décrits par une des six équations mises en évidence en II, 3. L'ensemble des résultats est résumé dans les tableaux II, III et IV qui permettent, par simple lecture, d'écrire dans chaque cas les conditions de raccord. On y a fait figurer, de plus, les mentions "Unicité", "Indétermination" et "Impossibilité" précédemment définies. Certains des résultats obtenus ont déjà été présentés dans les références [22] et [23].

II, 5. – EXEMPLES D'APPLICATION.

Les exemples les plus intéressants seront présentés dans les chapitres IV, V et VI, et nous nous limiterons ici à quelques applications destinées surtout à faire comprendre l'utilisation des tableaux I, II, III et IV. Certains des résultats obtenus sont classiques, tandis que d'autres seront utilisés plus loin.

II, 5. 1. – *Théorie classique de la couche limite.*

On considère l'écoulement d'un fluide faiblement visqueux autour d'un obstacle de dimension caractéristique L ; d'après les notations utilisées, on a :

$$\gamma = \frac{1}{R} \ll 1.$$

La majeure partie de l'écoulement est caractérisée par les valeurs : $L_x = L_y = L$, c'est-à-dire $\lambda = \theta = 1$, auquel on doit adjoindre $u_0 = U_\infty$ (ou $\psi_0 = LU_\infty$) afin que l'ordre de grandeur des vitesses soit compatible avec la valeur imposée à l'infini. Le tableau I montre alors immédiatement que $\epsilon = \frac{1}{R} \ll 1$, et que la majeure partie de l'écoulement est décrite par l'équation d'Euler bidimensionnelle. Si on note cette région avec l'indice (2), on a donc :

$$p_2 = 0, \quad q_2 = 0, \quad r_2 = 1.$$

La représentation ainsi définie n'est certainement pas uniformément valable puisque la condition d'adhérence à la paroi ne peut être satisfaite. On est donc en présence d'une singularité tangentielle, et, la vitesse au voisinage de la paroi, donnée par la solution (2) étant finie, on a nécessairement $\beta_2 = 1$.

La lecture du tableau III montre alors que le domaine intérieur $\mathcal{D}_1$ est décrit par l'équation d'Euler unidimensionnelle, l'équation de Stokes unidimensionnelle ou l'équation de Prandtl. Les deux premières éventualités sont à rejeter car on montre facilement qu'il n'existe aucune solution de ces équations capables de satisfaire les conditions limites imposées.

Le domaine $\mathcal{D}_1$ est donc décrit par les équations de Prandtl et on a, d'après le tableau III :

$$p_1 = \frac{r_2}{1 + \beta_2} = \frac{1}{2}, \quad \text{donc} \quad \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{R}}.$$

On retrouve ainsi l'épaisseur classique $\frac{1}{\sqrt{R}}$ de la couche limite et la forme des équations qui la décrivent.

II, 5. 2. — Région Navier-Stokes dans une couche limite.

Supposons qu'il soit nécessaire de retenir les équations complètes de Navier-Stokes dans un domaine $\mathcal{D}_1$ entourant un point particulier O de la paroi, le nombre de Reynolds R de l'écoulement extérieur étant très grand.

Envisageons d'abord le cas de la figure II, 5 où les dimensions caractéristiques de $\mathcal{D}_1$ seraient supérieures à l'épaisseur $\delta = L/\sqrt{R}$ de la couche limite au point O . $\mathcal{D}_1$ joue alors le rôle d'une singularité ponctuelle pour l'écoulement extérieur de fluide parfait et le tableau II nous permet d'écrire le raccord entre $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$: On a en effet : $p_2 = 0$, $q_2 = 0$, $r_2 = 1$, et, en faisant l'hypothèse que la vitesse en O , donnée par la solution de fluide parfait, est finie, $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 1$. Il vient donc immédiatement $q_1^{\frac{1}{2}} = 1$, soit $L_x = L_y = \frac{L}{R} \left(= \frac{\nu}{U_\infty} \right)$.

Les dimensions caractéristiques de $\mathcal{D}_1$ sont donc très petites devant l'épaisseur locale de la couche limite et une telle éventualité ne pourra se produire qu'au voisinage d'un bord d'attaque ($\delta = 0$).

Ce cas étant excepté, on peut dire qu'une zone Navier-Stokes au voisinage d'une paroi est nécessairement très petite devant l'épaisseur locale de la couche limite. Le raccord entre $\mathcal{D}_1$ et la région Euler n'a donc pas de sens et, pour déterminer les dimensions caractéristiques de $\mathcal{D}_1$, il faut écrire le raccord $\mathcal{D}_1 \leftrightarrow$ couche-limite à la paroi, conformément au schéma de la figure II, 6.

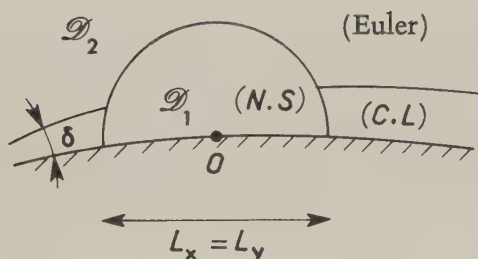


Figure II. 5

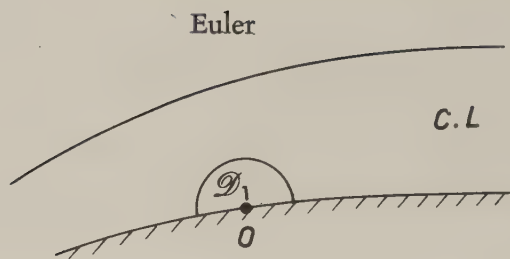


Figure II. 6

La région (2) étant la région couche limite, on a :

$$q_2 = 0, \quad p_2 = \frac{1}{2}, \quad r_2 = 0.$$

De plus, si on désigne par $\tau(\bar{x}_2) \sim \bar{x}_2^{\alpha_2}$ le comportement du frottement à la paroi, donné par la solution de couche limite, on a :

$$\alpha_2 = \alpha_2 \quad \text{et} \quad \beta_2 = 2.$$

La planche II nous conduit alors à :

$$q_1 = q_2 + \frac{p_2 (1 + \beta_2)}{\alpha_2 + \beta_2} = \frac{1}{2} \frac{3}{\alpha_2 + 2}$$

D'où la proposition 11* :

Proposition 11.

S'il est nécessaire de retenir les équations de Navier-Stokes au voisinage d'un point particulier O d'une paroi, autre qu'un bord d'attaque, les dimensions caractéristiques du domaine Navier-Stokes sont données par :

$$L_x = L_y = R^{-q_1} \quad \text{avec} \quad q_1 = \frac{3}{2(\alpha_2 + 2)}$$

α_2 désignant l'exposant du comportement du frottement à la paroi, donné par la solution de couche limite au voisinage de O . ($\tau \sim \bar{x}_2^{\alpha_2}$).

II, 5. 3. — Région Navier-Stokes dans une zone de mélange.

C'est un cas tout à fait semblable au précédent, la seule différence étant due aux valeurs des exposants α_2 et β_2 .

* La proposition 11, (comme d'ailleurs la proposition 12) n'est applicable que si on est certain que le terme dominant dans la solution de couche limite est bien $\bar{y}_2^2 \bar{x}_2^{\alpha_2}$. Dans toute la suite, ce sera effectivement le cas, mais, en toute rigueur, il faudra s'en assurer dans chaque exemple traité.

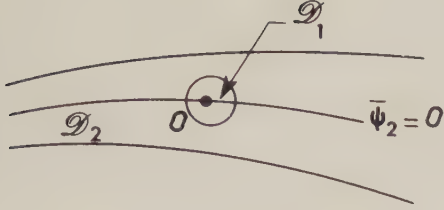


Figure II. 7

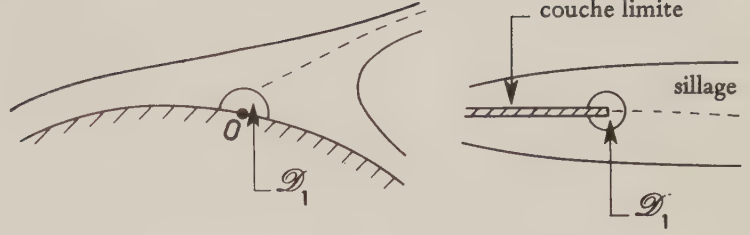


Figure II. 8

Si on désigne par $\bar{u}_2 \sim \bar{x}_2^{\alpha'_2}$ le comportement de la *vitesse*, au voisinage de O , sur la ligne de courant $\bar{\psi}_2 = 0$ passant par O , on a, en effet :

$$\alpha_2 = \alpha'_2 \quad \text{et} \quad \beta_2 = 1.$$

Le tableau II nous conduit alors à :

$$q_1 = \frac{1}{\alpha'_2 + 1}.$$

Proposition 12.

Dans une zone de mélange, les dimensions caractéristiques d'un domaine Navier-Stokes sont données par :

$$L_x = L_y = R^{-q_1} \quad \text{avec} \quad q_1 = \frac{1}{\alpha'_2 + 1}$$

α'_2 étant l'exposant du comportement de la composante u du vecteur vitesse sur la ligne de courant passant par O .

II, 5. 4. – *Région Navier-Stokes contiguë simultanément à une couche limite et une zone de mélange.*

Si le domaine $\mathcal{D}_1$ est contigu simultanément à une couche limite et une zone de mélange, comme cela se produit lorsqu'il y a séparation de l'écoulement (cf. figure II. 8), l'utilisation des propositions 11 et 12 permet, en égalant les deux expressions de q_1 , d'obtenir une relation entre α_2 et α'_2 . On obtient ainsi :

$$\alpha'_2 = \frac{2\alpha_2 + 1}{3}$$

A titre d'exemple, dans le problème du bord de fuite qui sera repris en IV. 4, la solution de Blasius à l'amont donne $\alpha_2 = 0$. On en déduit $\alpha'_2 = 1/3$. La vitesse sur la ligne de jet est donc proportionnelle à $\bar{x}_2^{1/3}$, ce qui est conforme au résultat de Goldstein [27], obtenu par étude directe du sillage.

Chapitre III

ÉTUDE DU COMPORTEMENT DE LA SOLUTION AU VOISINAGE D'UNE PAROI

III, 1. — INTRODUCTION.

Le chapitre II avait uniquement pour but de définir les approximations possibles des équations de Navier-Stokes et de déterminer, par les conditions de raccord, les ordres de grandeur des dimensions des domaines où ces équations sont valables ; Il n'a donc absolument pas été question de résoudre effectivement les équations obtenues. Cette question est évidemment très complexe, en général, et il ne semble pas que des techniques analytiques classiques permettent de la résoudre.

Si on veut donc préciser la solution, de nouvelles approximations sont nécessaires et c'est à ce stade qu'interviennent, en général, les méthodes basées sur l'utilisation des "modèles mathématiques" ou des techniques du calcul numérique.

Le but du présent chapitre se place sur un autre plan : il s'agit, par une étude locale du voisinage des parois, d'apporter le plus de renseignements possible sur la solution (ce qui, pour l'instant, est encore assez vague...). Il est clair, que dès maintenant deux cas très différents sont à distinguer :

1) Pour les écoulements à faible nombre de Reynolds, on sait [34] [35] que la quasi totalité de l'écoulement (voisinage de l'infini excepté) est décrite par l'équation de Stokes : On peut donc espérer qu'une étude détaillée des propriétés de l'équation biharmonique permettra, dans ce cas, de préciser la nature des solutions cherchées, au moins près de l'obstacle.

2) Pour les écoulements à grand nombre de Reynolds, la question est plus délicate et l'objet du paragraphe III, 2 est de montrer que, là encore, l'équation biharmonique joue un rôle fondamental.

On comprend, dans ces conditions, qu'une étude des solutions de cette équation s'impose, et c'est elle qui fait l'objet du paragraphe III, 3. Les résultats obtenus seront utilisés à la fois dans la deuxième partie (problèmes de séparation aux grands nombres de Reynolds) et dans la troisième partie (écoulements à faible nombre de Reynolds).

III, 2. — LINÉARISATION DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT, AU VOISINAGE DES PAROIS

III, 2. 1. — Principe.

Supposons résolu le problème initialement considéré de l'écoulement autour d'un obstacle. La solution obtenue doit vérifier la condition d'adhérence à la paroi, c'est-à-dire $\left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}}\right) = \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}}\right) = 0$. Il en résulte que, dans les équations complètes, les termes non linéaires (ou termes "d'inertie", ou "de convection") sont nuls à la paroi, ce qui suggère, sous réserve de régularité des dérivées $\frac{\partial(\bar{\Delta}\bar{\psi})}{\partial \bar{x}}$ et $\frac{\partial(\bar{\Delta}\bar{\psi})}{\partial \bar{y}}$, que la solution du problème global, lorsque la distance à la paroi tend vers zéro, est asymptotiquement solution des équations de Stokes bidimensionnelles ou unidimensionnelles. Diverses justifications viennent à l'appui de cette hypothèse :

a) De façon purement formelle, si on désigne par $\eta = \delta/L$ l'ordre de grandeur relatif de l'épaisseur de la zone considérée au voisinage de la paroi, on retrouvera les équations de Stokes pour les mouvements à contraintes visqueuses prépondérantes si on peut définir une valeur η telle que $\epsilon \gg 1$, c'est-à-dire, en utilisant les formules II $u_0 \ll \frac{U_\infty}{\lambda^2 \theta R}$. Or $\bar{u}$ tend vers zéro lorsque $\bar{y}$ tend vers zéro : donc u_0 est une fonction décroissante de η et on pourra toujours trouver un η tel que l'inégalité $u_0 \ll \frac{U_\infty}{\lambda^2 \theta R}$ soit satisfaite.

b) En un point régulier, $\bar{\psi}$ est développable en série de Taylor au voisinage de la paroi :

$$(1) \quad \bar{\psi} \sim \frac{\bar{y}^2}{2!} \bar{\psi}_2(\bar{x}) + \frac{\bar{y}^3}{3!} \bar{\psi}_3(\bar{x}) + \frac{\bar{y}^4}{4!} \bar{\psi}_4(\bar{x}) + \dots$$

Si on porte ce développement dans l'équation complète de Navier-Stokes d'une part, et dans l'équation de Stokes d'autre part, on obtient, en première approximation, lorsque $\bar{y} \rightarrow 0$, la même condition :

$$2\bar{\psi}_2'''' + \bar{\psi}_4 = 0.$$

Cette remarque justifie donc l'hypothèse faite pour tout point régulier de la paroi.

c) En un point singulier, c'est-à-dire là où un développement du type (1) n'existe pas (par exemple si $\bar{\psi}_2(\bar{x})$ n'est pas défini), l'hypothèse formulée reste valable si $\bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y})$ se comporte, au voisinage de ce point comme $\bar{\rho}^\alpha (\text{Log } \bar{\rho})^\beta f(\theta)$ où $\bar{\rho} = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}$ et $\text{tg } \theta = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$, sous réserve que $\alpha > 0$. En effet les termes visqueux sont alors d'ordre $\bar{\rho}^{\alpha-4} (\text{Log } \bar{\rho})^\beta$ et les termes d'inertie d'ordre $\bar{\rho}^{2\alpha-4} (\text{Log } \bar{\rho})^\beta$, quantité négligeable devant la première pour $\alpha > 0$, lorsque $\bar{\rho} \rightarrow 0$.

d) Enfin du point de vue physique, l'hypothèse est tout à fait acceptable puisqu'elle signifie simplement que les mouvements à faible vitesse sont dominés par les effets de la viscosité.

III, 2. 2. – Formulation du problème pour les grands nombres de Reynolds.

L'hypothèse que nous venons de faire est indépendante, à priori, de la valeur du nombre de Reynolds, et nous nous proposons de la formuler de façon plus précise dans le cas d'un écoulement à grand nombre de Reynolds, tel celui schématisé sur la figure III, 1. Pour plus de généralité, la présence d'une zone d'écoulement décollé BCD a été envisagée et on montrera dans le chapitre VI, indépendamment de l'étude faite ici, qu'une telle zone est nécessairement décrite par les équations d'Euler, à la limite R infini, pourvu qu'elle reste de dimensions finies.

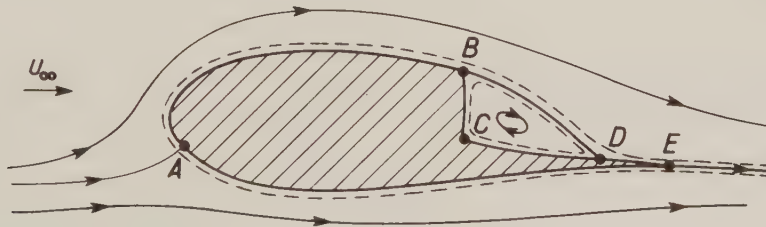


Figure III, 1.

On peut en conclure que le long des parois, et même s'il existe des décollements, l'écoulement est bien représenté, presque partout, par les équations de la couche-limite. Nous disons "presque partout" car ces équations peuvent éventuellement tomber en défaut au voisinage de certains points, tels les points ABCDE

de la figure III,1 , pour lesquels l'utilisation locale des équations de Navier-Stokes complètes peut être nécessaire.

Si on exclut pour l'instant ces régions, qui sont d'ailleurs nécessairement de très petites dimensions d'après II, le comportement de la solution au voisinage de la paroi peut être obtenu, en vertu de l'hypothèse formulée en III,2.1, en négligeant les termes d'inertie dans les équations de Prandtl. On est ainsi conduit à l'équation approchée :

$$(2) \quad \frac{\partial^3 \bar{\psi}}{\partial \bar{y}^3} = 6\beta(\bar{x})$$

qui s'intègre immédiatement, en tenant compte des conditions limites en $\bar{y} = 0$, sous la forme (3)

$$(3) \quad \bar{\psi} = \alpha(\bar{x})\bar{y}^2 + \beta(\bar{x})\bar{y}^3 .$$

On constate que l'équation (2) n'est autre que l'équation de Stokes unidimensionnelle $\frac{\partial^4 \bar{\psi}}{\partial \bar{y}^4} = 0$, ainsi qu'on pouvait le prévoir. D'autre part $\alpha(\bar{x})$ représente le frottement τ_f à la paroi, et $\beta(\bar{x})$ le gradient de pression extérieur, donné par la solution de fluide parfait ; si on revient aux quantités avec dimensions, on a :

$$(4) \quad \begin{cases} \tau_f = \frac{2\rho_\infty U_\infty^2}{\sqrt{R}} \alpha(x) \\ \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_e = \frac{6\rho_\infty U_\infty^2}{L} \beta(x) . \end{cases}$$

On a donc établi le résultat suivant :

Proposition 13.

Dans le cas d'un écoulement à grand nombre de Reynolds, et partout où les équations de la couche limite sont valables, la solution $\bar{\psi}$ du problème initialement considéré, s'écrit, en première approximation, au voisinage de la paroi, sous la forme :

$$\bar{\psi} \sim \alpha(\bar{x})\bar{y}^2 + \beta(\bar{x})\bar{y}^3 + \dots$$

Dans cette expression l'axe $O\bar{y}$ est localement normal à la paroi et la fonction $\beta(\bar{x})$ ne dépend que de la solution de fluide parfait.

Dans les régions où il faut retenir les équations de Navier-Stokes complètes (c'est-à-dire au voisinage d'une singularité), il est clair que le même raisonnement nous conduit à la conclusion ci-dessous:

Proposition 14.

Partout où il est nécessaire de retenir les équations complètes de Navier-Stokes, la fonction $\tilde{\psi}$ est asymptotiquement solution de l'équation biharmonique (5) lorsque la distance à la paroi y tend vers zéro.

Il est donc possible de définir un domaine $\tilde{\mathcal{D}}$, voisin de la paroi, où :

$$(5) \quad \tilde{\Delta}(\tilde{\Delta}\tilde{\psi}) = 0 .$$

Dans cette expression, la notation $\sim$ indique que la normalisation choisie est celle correspondant au domaine Navier-Stokes.

La solution de l'équation (5), doit, lorsque $|\bar{x}| \rightarrow \infty$ se raccorder avec l'expression (3) pour $|\bar{x}| \rightarrow 0$, conformément aux règles de raccord établies dans le chapitre II . Elle doit de plus vérifier la condition

d'adhérence à la paroi $\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}} = 0$; Il est clair que le problème ainsi défini est mal posé puisqu'on ne connaît pas le comportement de $\tilde{\psi}$ lorsque $\tilde{y} \rightarrow \infty$ et de nouvelles hypothèses sur ce comportement vont être nécessaires, dans la suite, pour déterminer la solution.

Avant d'aborder effectivement la résolution de l'équation biharmonique (5), une dernière remarque doit être faite : les zones où (5) est valable ont des dimensions caractéristiques évanescents lorsque $R \rightarrow \infty$: Il s'en suit qu'en première approximation, la courbure locale de la paroi ne joue aucun rôle . Plus précisément, si cette courbure est finie, la paroi devient, à l'échelle $\sim$, une plaque plane (cas des points A ou D) . Si la courbure est nulle, c'est-à-dire si le point singulier est un point anguleux, la paroi, à l'échelle $\sim$, devient un dièdre (points tels que B , C , ou E). La plaque plane pouvant être considérée comme un dièdre particulier, on est donc finalement amené à rechercher les solutions de (5) vérifiant les conditions d'adhérence

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}} = 0 \text{ sur les deux faces d'un dièdre.}$$

III, 3. — RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION BIHARMONIQUE $\Delta \Delta \tilde{\psi} = 0$, TELLE QUE $\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}} = 0$ SUR LES DEUX FACES D'UN DIÈDRE.

III, 3. 1. — Formulation générale.

On considère un dièdre de demi angle au sommet α , les axes $O\tilde{x}\tilde{y}$ étant choisis conformément à la figure III,2, l'axe $O\tilde{x}$ étant la bissectrice du dièdre.

Un point M quelconque du plan est repéré par son affixe z :

$$(6) \quad z = \tilde{x} + i\tilde{y} = \rho e^{i\theta}$$

et on pose, de plus :

$$(7) \quad \bar{z} = \tilde{x} - i\tilde{y} = \rho e^{-i\theta}.$$

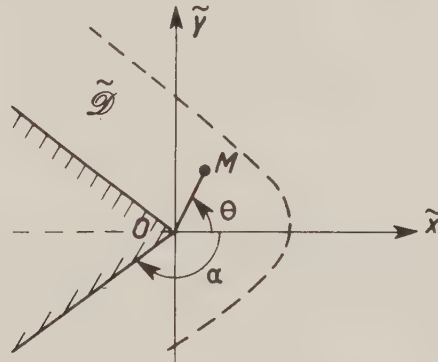


Figure III, 2.

Enfin, on considère que l'écoulement a lieu dans le secteur $(-\alpha < \theta < \alpha)$, et, dans toute la suite, les expressions surmontées d'une barre désigneront les quantités complexes conjuguées de ces expressions.

Si on fait dans l'équation (5) le changement de variables défini par (6) et (7), on constate facilement que l'on obtient (8) :

$$(8) \quad \frac{\partial^4 \tilde{\psi}}{\partial^2 z \partial^2 \bar{z}} = 0$$

Remarquons que, dans ce système, l'équation de Navier-Stokes s'écrit sous la forme (9) tandis que les vitesses $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ et le tourbillon $\tilde{\Omega}$ s'expriment au moyen des formules (10), (11) et (12).

$$(9) \quad 2 \frac{\partial^4 \tilde{\psi}}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = i \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z} \frac{\partial^3 \tilde{\psi}}{\partial \bar{z}^2 \partial z} - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial^3 \tilde{\psi}}{\partial z^2 \partial \bar{z}} \right)$$

$$(10) \quad \tilde{u} = i \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \bar{z}} \right)$$

$$(11) \quad \tilde{v} = - \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \bar{z}} \right)$$

$$(12) \quad \tilde{\Omega} = - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\psi} = - 2 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

La solution générale réelle de (8) s'écrit :

$$(13) \quad \tilde{\psi} = f(z) + \bar{f}(\bar{z}) + \bar{z}g(z) + z\bar{g}(\bar{z}).$$

Dans cette expression, les quatre fonctions $f, g, \bar{f}, \bar{g}$ sont dérivables au moins jusqu'au second ordre dans tout le domaine $\mathcal{D}$, sauf, peut-être, au point O et sur les parois. Elles sont, de plus, continues ainsi que leurs dérivées premières lorsque θ tend vers $\pm \alpha$, ρ étant fixé. Ces propriétés résultent directement de la nature physique du problème. Notons, de plus, que $\tilde{\psi}$ étant réel, les fonctions $\bar{f}$ et $\bar{g}$ sont respectivement les fonctions conjuguées de f et g . Il suffit pour s'en convaincre de rappeler la définition et les principales propriétés des fonctions conjuguées, ce qui se trouve fait dans l'annexe jointe en fin de texte.

Sur la portion ($x > 0$) de l'axe réel appartenant à $\mathcal{D}$, les fonctions f et g prennent des valeurs complexes telles que :

$$\begin{cases} f(x) \equiv A(x) + iB(x) \\ g(x) \equiv C(x) + iD(x) \end{cases}$$

$A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ et $D(x)$ étant réels : On a alors :

$$(14) \quad \begin{cases} f(z) \equiv A(z) + iB(z) \\ g(z) \equiv C(z) + iD(z) \end{cases}$$

Les fonctions impliquées dans les identités (14) sont en effet holomorphes dans $\mathcal{D}$ et (14) est vrai sur l'axe réel. Le théorème fondamental d'unicité des fonctions analytiques montre alors que (14) est vérifié dans tout $\mathcal{D}$.

Nous allons maintenant montrer que :

$$(15) \quad \overline{A(\bar{z})} \equiv A(z).$$

Il résulte en effet de la propriété 2 (cf. Annexe) que $\overline{A(\bar{z})}$ est la fonction conjuguée de $A(z)$, et de la propriété 1 qu'elle est holomorphe dans $\mathcal{D}$, donc identique à $A(z)$ puisque ces deux fonctions prennent des valeurs égales sur l'axe Ox . Le même raisonnement peut être fait pour les fonctions $B(z)$, $C(z)$ et $D(z)$.

L'application de la propriété 2 permet alors d'évaluer les fonctions $\bar{f}(z)$ et $\bar{g}(z)$ sous la forme :

$$\bar{f}(z) = \overline{A(\bar{z}) + iB(\bar{z})} = \overline{A(\bar{z})} - i\overline{B(\bar{z})}$$

soit :

$$(16) \quad \begin{cases} \bar{f}(z) = A(z) - iB(z) \\ \bar{g}(z) = C(z) - iD(z) . \end{cases}$$

Les conditions limites sur le dièdre, c'est-à-dire pour $z = Z = \rho e^{i\alpha}$ et $z = \bar{Z} = \rho e^{-i\alpha}$ s'écrivent simplement:

$$(17) \quad \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z}(Z) = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \bar{z}}(Z) = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z}(\bar{Z}) = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \bar{z}}(\bar{Z}) = 0 .$$

En tenant compte de la forme (13) de $\tilde{\psi}$ et des expressions (14) et (16), on obtient facilement le résultat suivant :

Proposition 15.

Il est toujours possible d'écrire la solution $\tilde{\psi}$ cherchée sous la forme :

$$(18) \quad \tilde{\psi} = \tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_2$$

avec

$$(19) \quad \begin{cases} \tilde{\psi}_1 = A(z) + A(\bar{z}) + \bar{z}C(z) + zC(\bar{z}) \\ \tilde{\psi}_2 = i [B(z) - B(\bar{z}) + \bar{z}D(z) - zD(\bar{z})] . \end{cases}$$

Les propriétés des fonctions A, B, C, D , réelles sur l'axe réel, entraînent qu'en deux points M et $\bar{M}$ symétriques par rapport à Ox , on a :

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_1(z) &\equiv \tilde{\psi}_1(\bar{z}) \\ \tilde{\psi}_2(z) &\equiv -\tilde{\psi}_2(\bar{z}) . \end{aligned}$$

Les conditions limites (17) imposent aux quatre fonctions A, B, C, D de vérifier les relations suivantes:

$$(20a) \quad \begin{cases} A'(Z) + C(\bar{Z}) + \bar{Z}C'(Z) = 0 \\ A'(\bar{Z}) + C(Z) + ZC'(\bar{Z}) = 0 \end{cases}$$

$$(20b) \quad \begin{cases} B'(Z) - D(\bar{Z}) + \bar{Z}D'(Z) = 0 \\ B'(\bar{Z}) - D(Z) + ZD'(\bar{Z}) = 0 . \end{cases}$$

On en conclut donc que la solution $\tilde{\psi}$ est la somme d'une solution antisymétrique ψ_1 et d'une solution symétrique ψ_2 , et que les déterminations de ces deux solutions sont complètement découplées.

III, 3. 2. — Recherche des solutions.

On est amené maintenant à rechercher toutes les fonctions $A(z)$ et $C(z)$ d'une part, $B(z)$ et $D(z)$ d'autre part, holomorphes dans $\mathcal{D}$ sauf peut-être sur les parois, et solutions respectivement des systèmes (20a) et (20b). Pour plus de généralité, nous ne faisons pas l'hypothèse que $\mathcal{D}$ peut être étendu jusqu'à l'infini. Les solutions cherchées pourront donc avoir des singularités à distance finie en dehors de $\mathcal{D}$, ce qui permettra, entre autres, de traiter les problèmes d'écoulements à faible nombre de Reynolds présentant des sources, tourbillons, ou toute autre singularité, dans le champ de l'écoulement.

Pour résoudre ce problème, nous effectuons la transformation :

$$(21) \quad \zeta = z^{\pi/\alpha} = \xi + i\eta.$$

Pour $\alpha \neq \pi$, cette transformation possède un pont de branchement à l'origine et un autre à l'infini, et nous choisissons la détermination qui, au secteur $-\alpha < \theta < \alpha$ du plan z , fait correspondre le secteur $-\pi, +\pi$ du plan ζ ; La transformation (21) a ainsi pour effet de transformer le dièdre du plan z en une coupure selon l'axe $\xi < 0$ du plan ζ (cf. figure III,3).

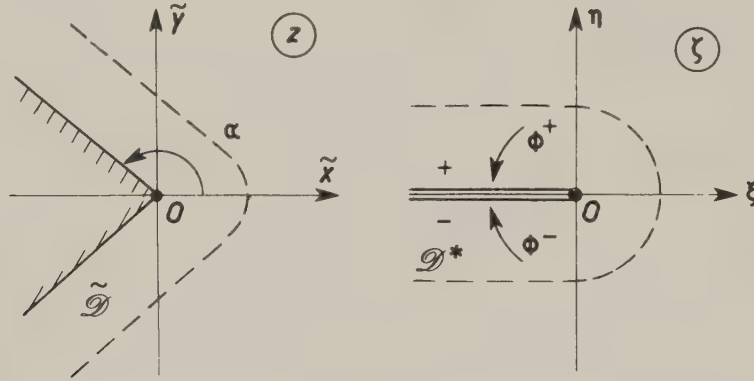


Figure III, 3.

Dans la transformation, les fonctions $A'(z)$, $B'(z)$, $C(z)$ et $D(z)$ deviennent quatre fonctions désignées par $a(\zeta)$, $b(\zeta)$, $c(\zeta)$ et $d(\zeta)$, et un calcul simple montre que les systèmes (20a) (20b), s'écrivent, dans le plan transformé sous les formes (22a) et (22b).

$$(22a) \quad \begin{cases} a^+ + c^- + \frac{\pi}{\alpha} e^{-2i\alpha} \xi c'^+ = 0 \\ a^- + c^+ + \frac{\pi}{\alpha} e^{2i\alpha} \xi c'^- = 0 \end{cases}$$

$$(22b) \quad \begin{cases} b^+ - d^- + \frac{\pi}{\alpha} e^{-2i\alpha} \xi d'^+ = 0 \\ b^- - d^+ + \frac{\pi}{\alpha} e^{2i\alpha} \xi d'^- = 0 \end{cases}$$

Dans ces expressions, la notation φ^+ indique la valeur prise par la fonction $\varphi(\zeta)$ lorsque le point ζ tend vers un point ξ de la coupure du côté $\eta > 0$ et de même, φ^- du côté $\eta < 0$; Enfin, nous noterons $\mathcal{D}^*$ le domaine transformé de $\mathcal{D}$.

III, 3. 2. 1. – Cas où l'angle α est quelconque ($\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, $\alpha \neq \pi$)

Dans le cas d'un angle α quelconque, il n'a pas été possible de définir un procédé de construction systématique des solutions de (22a) et (22b). Il est, par contre facile de montrer qu'il existe une infinité de solutions en puissance du type :

$$(23) \quad \begin{cases} a = k_1 \zeta^{n_1} \\ c = k'_1 \zeta^{n_1} \end{cases}$$

Par substitution de ces expressions dans (22a) on montre que l'exposant n_1 doit être une des racines de l'équation :

$$(24) \quad \sin 2n_1\pi + \frac{n_1\pi}{\alpha} \sin 2\alpha = 0$$

tandis que les constantes k_1 et k'_1 sont liées par la relation :

$$(25) \quad k_1 + k'_1 (\cos 2n_1\pi + \frac{n_1\pi}{\alpha} \cos 2\alpha) = 0 .$$

De même, pour la solution symétrique ψ_2 , il existe des solutions de la forme :

$$(26) \quad \begin{cases} b = k_2 \xi^{n_2} \\ d = k'_2 \xi^{n_2} \end{cases}$$

avec :

$$(27) \quad \sin 2n_2\pi - \frac{n_2\pi}{\alpha} \sin 2\alpha = 0$$

$$(28) \quad k_2 + k'_2 (-\cos 2n_2\pi + \frac{n_2\pi}{\alpha} \cos 2\alpha) = 0$$

Comme par hypothèse a, b, c, d sont réels sur l'axe réel $\xi > 0$, on doit se limiter aux solutions réelles des équations (24) et (27), solutions qui peuvent être obtenues graphiquement à partir du tracé de la courbe

$y = \frac{\sin x}{x}$, en remarquant que :

$$\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} = -\frac{\sin 2n_1\pi}{2n_1\pi} = \frac{\sin 2n_2\pi}{2n_2\pi} .$$

On retrouve ainsi le cas déjà étudié par DEAN et MONTAGNON [14], et qui conduit à la conclusion que les exposants n_1 et n_2 ne peuvent jamais être égaux si $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ et $\alpha \neq \pi$; Il s'ensuit que l'écoulement est dominé, au voisinage du sommet du dièdre, soit par une solution symétrique, soit par une solution antisymétrique, ce qui entraîne, s'il y a décollement, que la ligne de séparation est nécessairement confondue près du sommet avec la bissectrice de l'angle, c'est-à-dire tangente à l'axe $O\xi$.

On n'obtient pas toutefois de cette manière toutes les solutions de (22a) et (22b). Une extension possible a été proposée et étudiée en détail par MOFFATT [47], puis reprise systématiquement par LUGT et SCHWIDERSKI [46], Elle consiste à considérer également les racines complexes des équations (24) et (27) et à prendre ensuite la partie réelle des solutions qui définissent ainsi $\tilde{\psi}_1$ et $\tilde{\psi}_2$.

La méthode proposée ici permet également d'obtenir ces solutions . Il suffit en effet de rechercher a et c d'une part et b et d d'autre part sous la forme.

$$(29) \quad \begin{cases} a = \xi^{p_1} [\mu_1 \cos (q_1 \text{ Log } \xi) - \nu_1 \sin (q_1 \text{ Log } \xi)] \\ c = \xi^{p_1} [\mu'_1 \cos (q_1 \text{ Log } \xi) - \nu'_1 \sin (q_1 \text{ Log } \xi)] \end{cases}$$

$$(30) \quad \begin{cases} b = \xi^{p_2} [\mu_2 \cos (q_2 \text{ Log } \xi) - \nu_2 \sin (q_2 \text{ Log } \xi)] \\ d = \xi^{p_2} [\mu'_2 \cos (q_2 \text{ Log } \xi) - \nu'_2 \sin (q_2 \text{ Log } \xi)] \end{cases}$$

Les constantes $n_1 = p_1 + iq_1$, $k_1 = \mu_1 + iv_1$, $k'_1 = \mu'_1 + iv'_1$ sont alors les racines complexes de (24) et (25) et de même $n_2 = p_2 + iq_2$, $k_2 = \mu_2 + iv_2$, $k'_2 = \mu'_2 + iv'_2$ sont solutions complexes de (27) et (28). Sous forme réelle on obtient les conditions ci-dessous :

$$\begin{cases} \cos 2\pi p_1 \operatorname{sh} 2\pi q_1 + \frac{q_1 \pi}{\alpha} \sin 2\alpha = 0 \\ \sin 2\pi p_1 \operatorname{ch} 2\pi q_1 + \frac{p_1 \pi}{\alpha} \sin 2\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2\pi p_2 \operatorname{sh} 2\pi q_2 + \frac{q_2 \pi}{\alpha} \sin 2\alpha = 0 \\ \sin 2\pi p_2 \operatorname{ch} 2\pi q_2 + \frac{p_2 \pi}{\alpha} \sin 2\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu'_1 \left(\frac{p_1 \pi}{\alpha} \cos 2\alpha + \cos 2p_1 \pi \operatorname{ch} 2q_1 \pi \right) - \nu'_1 \left(\frac{q_1 \pi}{\alpha} \cos 2\alpha - \sin 2p_1 \pi \operatorname{sh} 2q_1 \pi \right) = 0 \\ \nu_1 + \nu'_1 \left(\frac{p_1 \pi}{\alpha} \cos 2\alpha + \cos 2p_1 \pi \operatorname{ch} 2q_1 \pi \right) + \mu'_1 \left(\frac{q_1 \pi}{\alpha} \cos 2\alpha - \sin 2p_1 \pi \operatorname{sh} 2q_1 \pi \right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_2 + \mu'_2 \left(\frac{p_2 \pi}{\alpha} \cos 2\alpha - \cos 2p_2 \pi \operatorname{ch} 2q_2 \pi \right) - \nu'_2 \left(\frac{q_2 \pi}{\alpha} \cos 2\alpha + \sin 2p_2 \pi \operatorname{sh} 2q_2 \pi \right) = 0 \\ \nu_2 + \nu'_2 \left(\frac{p_2 \pi}{\alpha} \cos 2\alpha - \cos 2p_2 \pi \operatorname{ch} 2q_2 \pi \right) + \mu'_2 \left(\frac{q_2 \pi}{\alpha} \cos 2\alpha + \sin 2p_2 \pi \operatorname{sh} 2q_2 \pi \right) = 0 \end{cases}$$

Les solutions ainsi définies forment un ensemble beaucoup plus étendu que les solutions (23) et (26), mais rien ne prouve qu'elles constituent les seules solutions du système (22a,b). Il est inutile, dans ces conditions, de chercher à satisfaire la condition de raccord avec la couche limite lorsque $\xi \rightarrow -\infty$. Il est d'ailleurs manifeste que cette condition n'a aucune chance d'être satisfaite, et les solutions (29) et (30) doivent être interprétées comme représentant le comportement *local* de la solution, au voisinage du sommet du dièdre. C'est en ce sens qu'elles ont été étudiées par MOFFATT et par LUGT et SCHWIDERSKI qui ont ainsi pu mettre en évidence l'existence d'une infinité de tourbillons au voisinage de O , conformément au schéma de la figure III,4.

Il est tout à fait remarquable de constater que des calculs numériques effectués récemment [5] [24], à partir des équations de Navier-Stokes complètes, confirment l'existence de tels tourbillons et que la répartition et l'intensité de ceux-ci sont en très bon accord avec la théorie présentée ici.

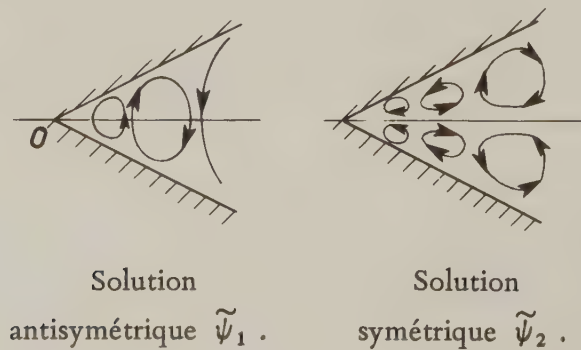


Figure III, 4.

III, 3.2.2. — Cas de la plaque plane ($\alpha = \frac{\pi}{2}$).

Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, la transformation conforme précédemment introduite s'écrit $\xi = z^2$ et les relations (22a) (22b) deviennent :

$$(31a) \quad \begin{cases} a^+ + c^- - (2\xi c')^+ = 0 \\ a^- + c^+ - (2\xi c')^- = 0 \end{cases}$$

$$(31b) \quad \begin{cases} b^+ - d^- - (2\xi d')^+ = 0 \\ b^- - d^+ - (2\xi d')^- = 0. \end{cases}$$

Considérons seulement le système (31a) et introduisons la fonction :

$$(32) \quad I(\xi) = -a(\xi) + 2\xi c'(\xi).$$

Il vient alors :

$$(33) \quad \begin{cases} I^+ = c^- \\ I^- = c^+ \end{cases}$$

et, par addition :

$$(34) \quad (I + c)^+ = (I + c)^-.$$

La fonction $(I + c)$ est, par construction, holomorphe dans le domaine $\mathcal{D}^*$ muni de la coupure $O\xi < 0$, et définie et continue à travers cette coupure d'après (34). L'application du théorème VI (Annexe) nous montre alors que $(I + c)$ est holomorphe même sur la coupure, sauf peut-être en O . Pour éliminer cette éventualité nous formulons l'hypothèse ci-dessous :

Hypothèse I :

Les fonctions a, b, c, d vérifient, à l'extrémité O de la coupure, une condition de HOLDER, du type

$$|\varphi(\xi)| \leq \frac{c}{|\xi|^n}$$

où c est une constante réelle positive et n une constante réelle plus petite que l'unité.

Il faut bien voir que cette hypothèse, mathématiquement très importante, est physiquement tout-à-fait plausible. Elle indique simplement que l'on exclut a priori les solutions conduisant à de fortes singularités pour les vitesses au sommet du dièdre. On peut s'attendre, pratiquement, à ce que ces quantités restent bornées et même, soient nulles au point O . L'hypothèse I est moins restrictive que cette éventualité puisqu'elle permet aux vitesses d'être infinies comme $1/|\xi|^n$ avec $n < 1$. Dans toute la suite nous nous limiterons donc à la recherche de la classe des fonctions vérifiant l'hypothèse I.

Si on revient maintenant au problème (34) il est clair que $(I + c)$ vérifie l'hypothèse I, et remplit toutes les conditions d'application du théorème VII.

On peut donc écrire :

$$(35) \quad I(\xi) + c(\xi) = 2F_1(\xi)$$

où $F_1(\xi)$ désigne une fonction de ξ holomorphe dans tout le domaine $\mathcal{D}^*$, y compris les points de la coupure et l'origine O .

Reprenant alors les relations (33), on obtient :

$$c^+ + c^- = 2F_1(\xi).$$

En posant $c = F_1(\xi) - \frac{G_1(\xi)}{\xi^{1/2}}$, il est immédiat de vérifier que $G_1^+ = G_1^-$ et que la fonction G_1 vérifie, elle aussi, toutes les conditions d'application du théorème VII, donc est holomorphe dans $\mathcal{D}^*$, y compris les points de la coupure. Un calcul algébrique simple conduit alors au résultat suivant.

Proposition 16.

La solution générale du système (31a), sous réserve de l'hypothèse I, s'écrit sous la forme :

$$(36) \quad \begin{cases} a = 2\xi F_1' - 2\xi^{1/2} G_1' - F_1 \\ c = F_1 - \xi^{-1/2} G_1 \end{cases}$$

Dans ces expressions, F_1 et G_1 sont deux fonctions holomorphes dans $\mathcal{D}^*$, y compris les points de la coupure $O\xi < 0$ et l'origine O .

On peut, de la même façon résoudre le système (31b) et on obtient :

$$(37) \quad \begin{cases} d = F_2 - \xi^{-1/2} G_2 \\ b = F_2 - 2\xi^{-1/2} G_2 + 2\xi F_2' - 2\xi^{1/2} G_2' \end{cases}$$

F_2 et G_2 possèdent les mêmes propriétés que F_1 et G_1 .

La classe des solutions définies par les formules (36) et (37) est extrêmement large puisqu'aucune hypothèse n'a été formulée sur la nature des fonctions F_1, F_2, G_1, G_2 , qui peuvent présenter, en dehors de $\mathcal{D}^*$, n'importe quel type de singularités, en n'importe quel point. Dans toute la suite, une telle famille de solution sera dénotée par $\mathcal{F}_1$.

Nous allons définir maintenant une classe $\mathcal{F}_2$, plus restreinte, au moyen de deux hypothèses supplémentaires concernant justement les propriétés de F_1, F_2, G_1, G_2 en dehors de $\mathcal{D}^*$:

Hypothèse II.

Les fonctions F_1, F_2, G_1, G_2 sont holomorphes dans tout le plan complexe ξ (donc également en dehors de $\mathcal{D}^*$), excepté peut-être, à l'infini.

Hypothèse III.

Les fonctions F_1, F_2, G_1, G_2 sont de degré fini à l'infini. (C'est-à-dire croissent moins vite qu'un polynôme).

L'application du théorème de Liouville (cf. par exemple [48]) conduit alors à la conclusion que les 4 fonctions sont des polynômes en ξ .

Dans ce cas, le retour au plan physique z ne présente pas de difficultés et on obtient, tous calculs faits :

$$\begin{aligned}
 (38a) \quad & \tilde{\psi} = \tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_2 \\
 (38b) \quad & \tilde{\psi}_1 = 4 \operatorname{Re} \left\{ x \frac{dP_1}{dz} + (2x + iy) \frac{Q_1}{z^2} - \frac{x}{z} \frac{dQ_1}{dz} \right\} \\
 (38c) \quad & \tilde{\psi}_2 = 2I \left\{ x \left(\frac{dP_2}{dz} - \frac{1}{z} \frac{dQ_2}{dz} + \frac{Q_2}{z^2} \right) - P_2 \right\}
 \end{aligned}$$

$\operatorname{Re} \{ \}$ et $I \{ \}$ désignent respectivement les parties réelles et imaginaires des parenthèses, et P_1, Q_1, P_2, Q_2 sont quatre polynômes arbitraires de la variable z^2 , à coefficients réels.

$$(39) \quad P_1 = \sum_n A_{1n} \frac{z^{2n}}{2}, \quad Q_1 = \sum_n B_{1n} \frac{z^{2n}}{2}, \quad P_2 = \sum_n A_{2n} \frac{z^{2n}}{2}, \quad Q_2 = \sum_n B_{2n} \frac{z^{2n}}{2}.$$

Ces résultats seront utilisés (Ch. V) à propos du décollement sur un corps de courbure modérée.

III, 3. 2. 3. – Cas de la plaque semi-infinie ($\alpha = \pi$)

Pour $\alpha = \pi$, on a $\xi = z$ et il n'y a pas lieu d'effectuer la transformation (21). Les relations (22a) et (22b) peuvent être écrites directement dans le plan z sous la forme:

$$(40a) \quad \begin{cases} A'^+ + C^- + (zC')^+ = 0 \\ A'^- + C^+ + (zC')^- = 0 \end{cases}$$

$$(40b) \quad \begin{cases} B'^+ - D^- + (zD')^+ = 0 \\ B'^- - D^+ + (zD')^- = 0 \end{cases}$$

Une méthode tout à fait analogue à celle utilisée en III, 3.2.2. conduit alors aux résultats suivants :

– Si la solution appartient à la classe $\mathcal{F}_1$, on a :

$$(41) \quad \begin{cases} A(z) = -zH_1 + z^{3/2}I_1' - \frac{3I_1}{2} z^{1/2} \\ C(z) = -H_1 - I_1' z^{1/2} - \frac{I_1}{2} z^{-1/2} \end{cases}$$

$$(42) \quad \begin{cases} B(z) = 2H_2 - zH_2' + z^{1/2}I_2 \\ D(z) = H_2' - z^{-1/2}I_2 \end{cases}$$

H_1, I_1, H_2, I_2 sont des fonctions arbitraires de z , holomorphes dans $\mathcal{D}^*$ et sur la coupure, y compris le point O .

– Si la solution appartient à la classe $\mathcal{F}_2$, les 4 fonctions ci-dessus sont des polynômes en z à coefficients réels, et on obtient tous calculs faits :

$$(43a) \quad \tilde{\psi} = \tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_2$$

$$(43b) \quad \tilde{\psi}_1 = 2 \operatorname{Re} \left\{ 2iy (\sqrt{z} R'_1 - P_1) - \frac{R_1}{\sqrt{z}} (2x + iy) \right\}$$

$$(43c) \quad \tilde{\psi}_2 = 4 \operatorname{Re} \left\{ iP_2 + yP'_2 - \frac{yQ_2}{\sqrt{z}} \right\}.$$

III, 3. 2. 4. – *Plaque de dimension finie.*

La méthode qui vient d'être utilisée dans le cas d'un dièdre peut être étendue à celui d'une plaque plane de dimension finie . Toutefois, quelques points particuliers sont alors à remarquer et le problème sera repris pour cet obstacle, au chapitre VIII.

E

Deuxième Partie



APPLICATION AUX ÉCOULEMENTS

A GRAND NOMBRE DE REYNOLDS



Chapitre IV

COMPORTEMENT LOCAL D'UNE COUCHE-LIMITE : BORD D'ATTAQUE ; POINT ANGULEUX ; BORD DE FUITE

IV, 1. – PROBLÈME DU BORD D'ATTAQUE ($R \gg 1$) .

On considère une plaque plane semi-infinie placée sans incidence dans un écoulement uniforme à l'infini, et on se propose de rechercher une description uniformément valable de l'écoulement lorsque le nombre de Reynolds R tend vers l'infini . Remarquons tout de suite qu'une difficulté s'introduit du fait qu'il n'existe pas de longueur caractéristique d'obstacle L permettant de définir R . Nous en introduisons une, purement artificielle, afin de nous placer dans le cadre général du chapitre II, mais il est clair que cette quantité ne doit finalement jouer aucun rôle et par conséquent s'éliminer automatiquement des résultats.

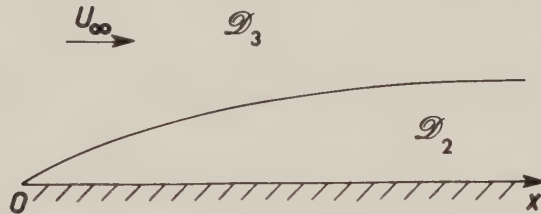


Figure IV, 1.

IV, 1. 1. – Description fluide parfait-couche limite.

La théorie classique de la couche-limite, rappelée en II,5.1, nous conduit à séparer l'écoulement en deux régions (cf. figure IV,1).

a) Dans le domaine $\mathcal{D}_3$ de fluide parfait, l'écoulement n'est pas perturbé et la solution s'écrit sous la forme

$$(1) \quad \bar{\psi}_3 = \bar{y}_3 .$$

On en conclut qu'au voisinage de n'importe quel point appartenant à $\mathcal{D}_3$, on peut écrire, en utilisant les notations du chapitre II :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_3 = 0 \\ q_3 = 0 \\ r_3 = 1 \\ \alpha_3 = 0 \\ \beta_3 = 1 \end{array} \right.$$

b) La région de couche-limite, notée $\mathcal{D}_2$, a pour épaisseur caractéristique $\frac{L}{\sqrt{R}}$ et la solution dans cette

région a été obtenue par Blasius sous forme de solution semblable (3) :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi}_2 = \sqrt{\bar{x}_2} f(\eta) \\ \eta = \frac{\bar{y}_2}{\sqrt{\bar{x}_2}} \end{array} \right.$$

Notons que, lorsque $\eta \rightarrow 0$ et $\eta \rightarrow \infty$, on a les comportements suivants.

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \eta \rightarrow 0 & , \quad f \sim \eta^2 \\ \eta \rightarrow \infty & , \quad f \sim \eta . \end{array} \right.$$

Utilisant toujours les notations du chapitre II, on peut écrire, dans le domaine $\mathcal{D}_2$:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_2 = 1/2 \\ q_2 = 0 \\ r_2 = 0 \end{array} \right.$$

Remarquons enfin que L s'élimine bien du résultat final car, en tenant compte de (5), la solution (3) s'écrit en variables physiques, sous la forme :

$$\psi_2 = \sqrt{\nu x U_\infty} f\left(y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}\right)$$

IV, 1. 2. — Voisinage du bord d'attaque.

IV, 1. 2. 1. — Singularités des solutions précédentes au bord d'attaque.

La description ci-dessus cesse d'être valable au voisinage du bord d'attaque O pour deux raisons :

– A l'amont, si on considère la ligne de courant issue de l'infini et aboutissant en O , la vitesse u est discontinue à la traversée de ce point.

– A l'aval, la solution de Blasius (3) montre que, lorsque $\bar{x}_2 \rightarrow 0$, les dérivées partielles successives de $\bar{\psi}_2$ par rapport à $\bar{x}_2$, qui se trouvent négligées dans les équations de Prandtl, ne restent pas bornées.

Pour étudier le voisinage de O , il est nécessaire de préciser le comportement de $\bar{\psi}_2$ lorsqu'on s'approche de ce point. Or le comportement en question dépend essentiellement de la façon dont on s'approche de O :

– Si on tend vers O en suivant une ligne $\eta = \text{cste}$, il est clair, d'après (3) que :

$$\bar{\psi}_2 \sim \sqrt{\bar{x}_2}$$

donc :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = 1/2 \\ \beta_2 = 0 \end{array} \right.$$

– Si on tend vers O en suivant une ligne $\bar{y}_2 = \bar{x}_2^n$, deux cas sont à envisager :

a) Lorsque $n > 1/2$, la variable de similitude $\eta = \bar{y}_2 \bar{x}_2^{-1/2}$ tend vers zéro, donc $f \sim \eta^2 = \bar{y}_2 \bar{x}_2^{-1}$ et on obtient finalement :

$$\bar{\psi}_2 \sim \bar{y}_2^2 \bar{x}_2^{-1/2}$$

soit :

$$(7) \quad \begin{cases} \alpha_2 = -\frac{1}{2} \\ \beta_2 = 2 \end{cases}$$

(C'est en particulier le cas si on tend vers O en suivant la plaque).

b) Lorsque $n < \frac{1}{2}$, $\eta \rightarrow \infty$, et on a, de même :

$$\bar{\psi}_2 \sim \bar{y}_2$$

donc :

$$(8) \quad \begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \beta_2 = 1 \end{cases}$$

La singularité au bord d'attaque est donc de nature complexe et, pour obtenir une représentation uniformément valable de l'écoulement, il est nécessaire d'introduire un nouveau domaine $\mathcal{D}_1$ qui doit répondre aux exigences suivantes :

a) Il doit correspondre à une singularité ponctuelle aussi bien pour la solution dans $\mathcal{D}_2$ que pour la solution dans $\mathcal{D}_3$.

b) Il doit être capable d'être raccordé à $\mathcal{D}_3$ caractérisé par les valeurs (2) des paramètres α, β, p, q, r .

c) Il doit être capable d'être raccordé à $\mathcal{D}_2$, et ceci quelque soit la façon dont on tend vers O , donc quel que soit le couple (6), (7) ou (8) des valeurs de α_2, β_2 , jointes aux valeurs (5) de p_2, q_2, r_2 .

IV, 1. 2. 2. – Équation valable dans $\mathcal{D}_1$.

La nature ponctuelle de la singularité nous conduit à utiliser le tableau II, et montre déjà que $\mathcal{D}_1$ ne peut être décrit que par les équations de Navier-Stokes, de Stokes bidimensionnelles, ou d'Euler bidimensionnelles (cf. figure IV,2).

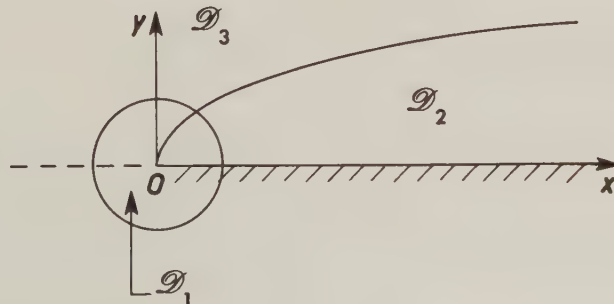


Figure IV, 2.

On peut s'attendre, intuitivement, à ce que $\mathcal{D}_1$ soit décrit par les équations de Navier-Stokes : c'est en fait une conséquence du raccord $\mathcal{D}_1 \leftrightarrow \mathcal{D}_2$. En effet, compte tenu de (5) ce raccord s'écrit, quelque soit l'équation retenue dans $\mathcal{D}_1$:

$$q_1 = \frac{1}{2} \frac{1 + \beta_2}{\alpha_2 + \beta_2} - \frac{r_1}{\alpha_2 + \beta_2}$$

et les valeurs de q_1, r_1 doivent, ainsi qu'on l'a déjà dit être indépendantes du couple (6), (7) ou (8) des valeurs de α_2, β_2 . Or dans les trois cas, on a toujours* :

$$\frac{1 + \beta_2}{\alpha_2 + \beta_2} = 2$$

alors que $\alpha_2 + \beta_2$ prend des valeurs distinctes ($1/2$, $3/2$ et 1). Le raccord $\mathcal{D}_1 \leftrightarrow \mathcal{D}_2$ implique donc nécessairement $r_1 = 0$ ce qui entraîne $q_1 = 1$.

Le domaine $\mathcal{D}_1$ se trouve ainsi complètement défini par le seul raccord aval ($\mathcal{D}_1 \leftrightarrow \mathcal{D}_2$). On peut en conclure que le raccord amont ($\mathcal{D}_1 \leftrightarrow \mathcal{D}_3$) doit être automatiquement satisfait. Il est aisé de constater à l'aide du tableau II et des valeurs de p_3, q_3, r_3, α_3 et β_3 que tel est bien le cas, ce qui prouve la cohérence de la description proposée. Notons enfin que la valeur $q_1 = 1$ donne pour dimension caractéristique de $\mathcal{D}_1$:

$$L_{x_1} = L_{y_1} = \frac{L}{R} = \frac{\nu}{U_\infty}$$

L s'élimine donc automatiquement, comme prévu.

Proposition 17 **

Au voisinage d'un bord d'attaque, il existe une zone Navier-Stokes, capable d'être raccordée simultanément avec la solution de fluide parfait et la couche-limite. Ce domaine a pour dimension caractéristique

$$\frac{L}{R} = \frac{\nu}{U_\infty}.$$

IV, 1. 2. 3. – Conséquences de l'existence d'une zone Navier-Stokes au bord d'attaque.

On vient de voir, au paragraphe précédent, que le raccord $\mathcal{D}_1 \leftrightarrow \mathcal{D}_2$ impliquait que $\mathcal{D}_1$ soit décrit par les équations de Navier-Stokes tandis que le raccord $\mathcal{D}_1 \leftrightarrow \mathcal{D}_3$ devait être automatiquement satisfait. Ceci signifie que nous possédons un nombre surabondant d'informations pour définir $\mathcal{D}_1$. Ce fait va être rencontré fréquemment dans la suite et il convient d'insister tout particulièrement sur ce point important que l'on peut interpréter de deux façons :

* L'étude classique des équations de la couche limite montre l'existence d'un groupe de transformations à un paramètre, conservant la solution, et assurant l'existence de solutions semblables ; Plus précisément on a :

$$\bar{\psi}_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = a^{-1} \bar{\psi}_2(a^2 \bar{x}_2, a \bar{y}_2)$$

On en conclut que, dans le cas des comportements algébriques, les exposants α_2 et β_2 sont nécessairement liés par la relation $2\alpha_2 + \beta_2 = 1$. Il n'est donc pas surprenant de retrouver cette condition, à partir de la solution de Blasius, quelle que soit la façon dont on s'approche du point O , mais le point intéressant de notre étude est de montrer, sans utiliser explicitement les équations de la couche limite, que cette relation doit être vérifiée et qu'elle implique, de plus, l'existence d'un domaine Navier-Stokes au voisinage de O . La même remarque peut être faite en IV,2 pour le bord d'attaque anguleux avec la solution de Falker-Skan.

** Ce résultat avait déjà été obtenu par M. Van Dyke, S.A. Berger et V. Sychev.

1) Ou bien on connaît complètement les solutions extérieures à $\mathcal{D}_1$, donc, entre autres, leurs comportement au voisinage de $\mathcal{D}_1$, et la remarque ci-dessus vient simplement apporter une preuve de cohérence de la description proposée.

2) Ou bien les solutions extérieures à $\mathcal{D}_1$ ne sont pas complètement connues : *L'existence même du domaine $\mathcal{D}_1$ implique alors certaines conditions sur les comportements des solutions extérieures au voisinage du point singulier, conditions que l'on peut obtenir, sans qu'il soit nécessaire de résoudre effectivement le problème extérieur.*

A titre d'exemple prenons le problème du bord d'attaque à partir des 3 hypothèses suivantes :

– Il existe au bord d'attaque un domaine Navier-Stokes,

– Il existe une zone extérieure de fluide parfait $\mathcal{D}_3$, connue.

– Il existe, le long de la plaque, une couche limite $\mathcal{D}_2$, mais on ne sait rien sur le comportement de la solution de Prandtl, au voisinage de O . On peut alors retrouver ce comportement et même la forme (3) de la solution de Blasius. En effet :

a) Le raccord $\mathcal{D}_1 \leftrightarrow \mathcal{D}_3$ permet de déterminer $q_1 = 1$.

b) Si on s'approche du point O en suivant la plaque, l'adhérence du fluide à la paroi impose que la solution $\bar{\psi}_2$ de la couche limite ait un comportement de la forme :

$$(9) \quad \bar{\psi}_2 \sim \bar{x}_2^{\alpha_2} \bar{y}_2^2$$

Le raccord $\mathcal{D}_1 \leftrightarrow \mathcal{D}_2$, écrit en utilisant le tableau II et les valeurs (5) de p_2, q_2, r_2 obtenues par le raccord $\mathcal{D}_2 \leftrightarrow \mathcal{D}_3$, nous conduit alors à :

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2}$$

On peut donc déjà conclure, sans même faire d'hypothèse de similitude pour la solution de couche-limite et sans résoudre les équations de Prandtl, que la solution de celles-ci conduit nécessairement à un frottement τ_p à la paroi singulier au bord d'attaque, de la forme :

$$\tau_p \sim \bar{x}^{-1/2}$$

c) supposons qu'il existe maintenant une solution semblable dans $\mathcal{D}_2$, de la forme (10)

$$(10) \quad \begin{cases} \bar{\psi}_2 = \bar{x}_2^{\alpha'_2} f(\eta) \\ \eta = \frac{\bar{y}_2}{\bar{x}_2^{\alpha''_2}} \end{cases}$$

La condition de raccord $\mathcal{D}_1 \leftrightarrow \mathcal{D}_2$ détermine α'_2 et α''_2 . Il suffit en effet, dans un premier temps, de s'approcher du bord d'attaque en suivant une ligne $\eta = \text{cste}$. On en conclut immédiatement par le raccord $\mathcal{D}_1 \leftrightarrow \mathcal{D}_2$ que $\alpha'_2 = 1/2$. Dans un deuxième temps, on identifie le comportement (9) de $\bar{\psi}_2$ avec la solution (10) lorsque $\eta \rightarrow 0$: Il vient ainsi :

$$\alpha_2 = \alpha'_2 - 2\alpha''_2$$

d'où

$$\alpha''_2 = \frac{\alpha'_2 - \alpha_2}{2} = 1/2$$

On retrouve donc exactement la forme (3) de la solution dans $\mathcal{D}_2$, sans avoir, à aucun moment, utilisé effectivement les équations de Prandtl.

IV, 1. 3. – Etude de la région Navier-Stokes ($\mathcal{D}_1$)

On va maintenant utiliser les résultats du chapitre III pour préciser le comportement $\bar{\psi}_1^0$ de la solution $\bar{\psi}_1$ dans $\mathcal{D}_1$, au voisinage de la paroi et, en particulier, au point O . Les notations utilisées au chapitre III sont telles que :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi}_1^0 \equiv \tilde{\psi} \\ \bar{x}_1 \equiv -\tilde{x} \\ \bar{y}_1 \equiv \tilde{y} \end{array} \right.$$

IV, 1. 3. 1. – Solution appartenant à la classe $\mathcal{F}_2$.

Si nous faisons l'hypothèse que la solution $\bar{\psi}_1^0$ appartient à la classe $\mathcal{F}_2$ définie en III,3.2, il suffit, pour avoir l'expression de $\bar{\psi}_1$ au voisinage de la paroi, d'appliquer les formules III (43), valables pour une plaque semi-infinie, en tenant compte des notations (11) et du fait que la solution cherchée est, par hypothèse, symétrique par rapport à $O\bar{x}_1$

On obtient ainsi :

$$(12) \quad \bar{\psi}_1^0 = 4 \operatorname{Re} \left\{ iP_2 + \bar{y}_1 P_2' - \frac{\bar{y}_1 Q_2}{\sqrt{z}} \right\}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} z = -\bar{x}_1 + i\bar{y}_1 \\ P_2 = \sum_n \frac{B_n}{4} z^n \\ Q_2 = \sum_n \frac{A_n}{4} z^n \end{array} \right.$$

(A_n et B_n sont des constantes réelles)

S'il existe une solution appartenant à la classe $\mathcal{F}_2$, on doit être capable de déterminer les constantes A_n et B_n de telle sorte que l'expression (12) puisse être raccordée, à l'infini aval, avec les deux couches limites qui existent de part et d'autre de la plaque (cf. fig. IV,3).

La détermination, en IV,1.2, des dimensions caractéristiques de $\mathcal{D}_1$ nous a déjà permis d'écrire ce raccord en terme d'ordre de grandeur. Il ne nous reste donc plus qu'à écrire l'identité des comportements des solutions $\bar{\psi}_1$ et $\bar{\psi}_2$ respectivement lorsque $\bar{x}_1 \rightarrow \infty$ et $\bar{x}_2 \rightarrow 0$.

Plus précisément, comme on ne connaît pas la solution $\bar{\psi}_1$ dans $\mathcal{D}_1$, mais seulement son expression asymptotique $\bar{\psi}_1^0$ au voisinage de la paroi, on est amené, conformément au schéma de la figure IV,3, à n'écrire qu'un raccord partiel correspondant à l'identification des comportements au voisinage de la plaque, c'est-à-dire lorsque $\bar{y}_1$ et $\bar{y}_2$ tendent vers zéro.

Pour les deux couches-limites ces comportements sont connus et de la forme (13).

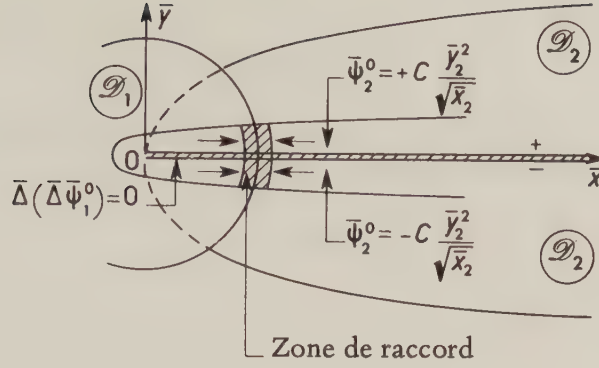


Figure IV, 3.

$$(13) \quad \begin{cases} \bar{\psi}_2^0 \sim 0,166 \frac{\bar{y}_2^2}{\sqrt{\bar{x}_2}} + 0 (\bar{y}_2^4) & \text{si } \bar{y}_2 > 0 \quad (\text{côté } +) \\ \bar{\psi}_2^0 \sim -0,166 \frac{\bar{y}_2^2}{\sqrt{\bar{x}_2}} + 0 (\bar{y}_2^4) & \text{si } \bar{y}_2 < 0 \quad (\text{côté } -) \end{cases}$$

Pour la solution (12) le comportement en question sera obtenue formellement en faisant tendre $\bar{x}_1$ vers l'infini et $\bar{y}_1$ vers zéro. Après réordonnement par rapport aux puissances croissantes de $\bar{y}_1$, un calcul sans difficulté mais assez long conduit aux expressions (14)

$$(14) \quad \begin{cases} \bar{\psi}_1^0 \sim \bar{y}_1^2 \sum_n \alpha_n \frac{(-\bar{x}_1)^{n-1}}{\sqrt{\bar{x}_1}} + \bar{y}_1^3 \sum_n \beta_n (-\bar{x}_1)^{n-3} + \dots & \text{si } \bar{y}_1 > 0 \quad (\text{côté } +) \\ \bar{\psi}_1^0 \sim -\bar{y}_1^2 \sum_n \alpha_n \frac{(-\bar{x}_1)^{n-1}}{\sqrt{\bar{x}_1}} + \bar{y}_1^3 \sum_n \beta_n (-\bar{x}_1)^{n-3} + \dots & \text{si } \bar{y}_1 < 0 \quad (\text{côté } -) \end{cases}$$

Les constantes réelles α_n et β_n sont reliées aux A_n, B_n par les formules (15) :

$$(15) \quad \begin{cases} \alpha_n = -\left(n - \frac{1}{2}\right) A_n \\ \beta_n = -\frac{n(n-4)(2n-1)}{6} B_n \end{cases}$$

On peut donc identifier (13) et (14) en choisissant :

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0,166 & \text{d'où : } A_1 = -0,332 \\ \alpha_n = 0 & \text{si } n > 1 \\ \beta_n = 0 \end{cases}$$

Remarquons que le fait que les β_n soient nuls n'est pas surprenant et correspond à l'absence de gradient de pression extérieur pour les couches limites. Notons enfin qu'il serait incohérent de pousser l'identification au delà des termes en $\bar{y}_1^3$ sans tenir compte, comme on l'a fait jusque là, de l'influence des termes d'inertie.

Proposition 18.

Dans le problème du bord d'attaque, il existe une solution, dans la région $\mathcal{D}_1$, au voisinage de la paroi, qui appartient à la classe $\mathcal{F}_2$ définie au chapitre III. Cette solution se raccorde bien aux couches limites de

part et d'autre de la plaque, à l'infini aval . Elle est de la forme :

$$\bar{\psi}_1^0 = 0,332 \operatorname{Re} \{ \bar{y}_1 \sqrt{z} \}$$

En introduisant un système de coordonnées polaires (ρ, θ) comme l'indique la figure IV,4, la solution $\bar{\psi}_1^0$ s'écrit encore sous la forme (16).

$$(16) \quad \begin{aligned} \bar{\psi}_1^0 &= 0,332 \rho^{3/2} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \\ \bar{x}_1 &= -\rho \cos \theta, \quad \bar{y}_1 = \rho \sin \theta \end{aligned}$$

On reconnaît ainsi le premier terme du développement déjà obtenu par CARRIER et LIN [6] pour ce même problème.

On sait que la validité d'un tel développement a été mise en doute par de nombreux auteurs, la principale objection étant que l'on ne peut pas raccorder directement une zone Stokes et une zone couche limite et qu'il est nécessaire d'introduire une région intermédiaire où il faut retenir les équations de Navier-Stokes complètes . Cette objection est parfaitement fondée, ainsi qu'on l'a vu en IV,1.2.2, puisque $\mathcal{D}_1$ ne peut être décrit que par les équations de Navier-Stokes . Si donc on introduit au voisinage du bord d'attaque un domaine $\mathcal{D}_1'$ décrit par l'équation de Stokes, ses dimensions caractéristiques sont petites devant celles de $\mathcal{D}_1$ et le raccord direct $\mathcal{D}_1' \leftrightarrow \mathcal{D}_2$ n'a pas de sens (cf. figure IV,5).

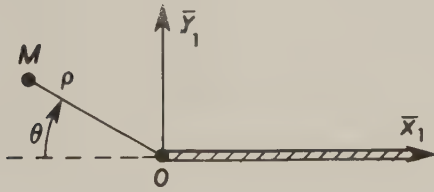


Figure IV, 4.

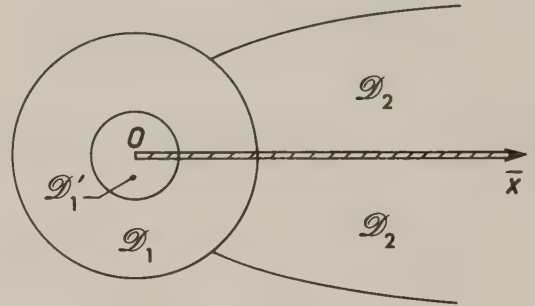


Figure IV, 5.

Un tel raisonnement appelle une remarque essentielle : *L'existence du domaine $\mathcal{D}_1'$ est purement formelle*. Pour la mettre en évidence, en effet, il suffit d'effectuer, dans les équations de Navier-Stokes, un changement d'échelle caractéristique simultanément sur $\bar{x}_1$, $\bar{y}_1$ et $\bar{\psi}_1$ de telle sorte que $\mathcal{D}_1'$ soit beaucoup plus petit que $\mathcal{D}_1$. Si on se reporte au tableau II, on constate que le raccord $\mathcal{D}_1' \leftrightarrow \mathcal{D}_1$ est possible mais contient une indétermination qui est justement le rapport des échelles caractéristiques de $\mathcal{D}_1'$ et $\mathcal{D}_1$. Cette remarque nous amène à penser que *l'existence du domaine Stokes $\mathcal{D}_1'$ n'est pas liée à celle d'une singularité éventuelle des équations de Navier-Stokes en O, c'est-à-dire à la non validité de ces équations dans le domaine $\mathcal{D}_1'$* . En fait les équations de Navier-Stokes sont bien valables jusqu'au point O, mais le comportement asymptotique des solutions de ces équations est localement solution de l'équation de Stokes lorsque ρ tend vers zéro. Cette propriété, assez intuitive, vient d'être démontrée de façon rigoureuse par KONDRAT'EV [37], dans le cas d'un dièdre d'angle au sommet quelconque.

Le point de vue que nous avons défendu jusqu'ici est basé sur l'idée, présentée au chapitre III, que la solution des équations de Navier-Stokes est asymptotiquement solution des équations de Stokes non seulement au voisinage de O, mais dans tout un voisinage de la paroi (cf. figure IV,6).

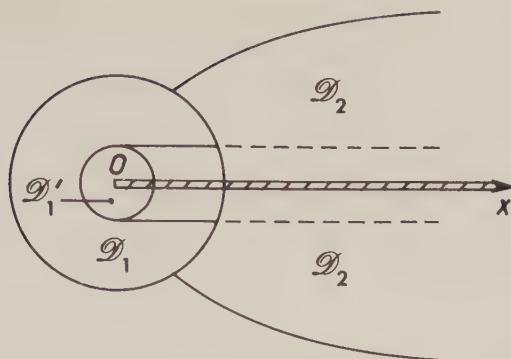


Figure IV, 6.

On ne raccorde donc pas directement $\mathcal{D}'_1$ et $\mathcal{D}_2$, ni, non plus, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, mais, en fait, les développements limités, au voisinage de la plaque, des solutions dans $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ (développements notés jusqu'ici $\bar{\psi}_1^0$ et $\bar{\psi}_2^0$).

IV, 1. 3. 2. — Solution appartenant à la classe $\mathcal{F}_1$.

Dans le cas du raisonnement schématisé par la figure IV,5, il est clair qu'on peut toujours choisir le domaine $\mathcal{D}'_1$ suffisamment petit pour que la solution dans $\mathcal{D}'_1$ appartienne à la classe $\mathcal{F}_2$ c'est-à-dire ne présente aucune singularité en dehors des parois. Dans ces conditions la solution (12) peut être interprétée comme un comportement local de la solution des équations de Navier-Stokes dans laquelle les A_n et B_n restent indéterminés (Notons d'ailleurs qu'il ne faut pas retenir trop de termes dans l'expression (12) sans tenir compte des termes d'inertie. Plus précisément, si (12) est ordonné selon les puissances croissantes de z et commence par z^q , on ne peut pas assurer la validité de (12) à partir des termes en z^{2q}).

Si, par contre, nous reprenons le point de vue du raccord de deux développements limités, le domaine de définition de $\bar{\psi}_1^0$ est, en fait, tout le domaine $\mathcal{D}_1$, et on ne peut assurer l'analyticité de $\bar{\psi}_1^0$ que là où cette expression représente bien la solution $\bar{\psi}_1$ des équations de Navier-Stokes, c'est-à-dire au voisinage de la plaque. Dans ces conditions, on sait que $\bar{\psi}_1^0$ appartient à la classe $\mathcal{F}_1$ définie au chapitre III, mais rien ne prouve qu'elle appartienne à la classe $\mathcal{F}_2$ comme nous l'avons supposé en IV,1.3.1. Une expression plus générale de $\bar{\psi}_1^0$ est ainsi donnée par la formule (17) dans laquelle H_2 et I_2 désignent deux fonctions de z , holomorphes, donc *développable en série de Taylor* en tout point de la plaque et de son voisinage.

$$(17) \quad \bar{\psi}_1^0 = -4 \operatorname{Re} \left\{ iH_2 + \bar{y}_1 H'_2 - \bar{y}_1 \frac{I_2}{\sqrt{z}} \right\}$$

Pour écrire la condition de raccord avec les couches limites à l'infini aval, il faut commencer par développer (17) $\bar{x}_1$ étant fixé et $\bar{y}_1$ tendant vers zéro, ce qui donne (18), puis faire tendre $\bar{x}_1$ vers l'infini.

$$(18) \quad \begin{cases} \bar{\psi}_1^0 \sim \frac{4\bar{y}_1^2}{\sqrt{\bar{x}_1}} \left[\frac{I_2(\bar{x}_1)}{2\bar{x}_1} + I'_2(\bar{x}_1) \right] & \text{si } \bar{y}_1 > 0 \quad (\text{côté } +) \\ \bar{\psi}_1^0 \sim -\frac{4\bar{y}_1^2}{\sqrt{\bar{x}_1}} \left[\frac{I_2(\bar{x}_1)}{2\bar{x}_1} + I'_2(\bar{x}_1) \right] & \text{si } \bar{y}_1 < 0 \quad (\text{côté } -) \end{cases}$$

Le raccord avec les couches limites (13) est donc possible à condition que :

$$\lim_{\bar{x}_1 \rightarrow \infty} \left[\frac{I_2(\bar{x}_1)}{2\bar{x}_1} + I'_2(\bar{x}_1) \right] = 0,166$$

Malheureusement ceci est insuffisant pour déterminer les fonctions $I_2(z)$ et $H_2(z)$, alors qu'on avait pu le faire lorsqu'on savait que ces fonctions étaient des polynômes. Il est tout de même intéressant d'avoir pu mettre la solution $\bar{\psi}_1^0$ sous la forme (17), qui redonne au voisinage du point O le comportement local (16) du type de Carrier et Lin, et qui, à l'infini aval peut être raccordée avec les deux couches limites ; cette solution dépend de deux fonctions arbitraires et il n'est pas impossible d'envisager une méthode approchée pour déterminer, à partir de (17) ces deux fonctions. On peut, par exemple, penser à une méthode de séries tronquées ou à l'emploi de modèles mathématiques, mais, jusqu'ici, ces essais n'ont pas abouti.

IV, 2. — BORD D'ATTAQUE ANGULEUX.

Nous considérons, conformément au schéma de la figure IV,7 l'écoulement symétrique autour d'un bord d'attaque anguleux de demi-angle au sommet α .

Le problème constitue une généralisation de celui du bord d'attaque et, comme au § IV,1, on distingue trois régions :

a) Une région fluide parfait $\mathcal{D}_3$, où nous supposons l'écoulement irrotationnel ; La vitesse $U(x)$ sur l'axe de symétrie, au voisinage de O , est de la forme $U(x) = Cx^m$ avec :

$$(19) \quad m = \frac{\alpha}{\pi - \alpha}$$

Au voisinage de l'axe de symétrie, comme, d'ailleurs, le long des parois du dièdre, la solution dans cette zone est de la forme :

$$(20) \quad \bar{\psi}_3 \sim \bar{y}_3 \bar{x}_3^{\alpha/\pi - \alpha}$$

Remarquons que dans ce problème il existe une longueur caractéristique d'obstacle L , introduite par l'intermédiaire de la constante C définissant l'évolution de la vitesse, au moyen de la relation :

$$(21) \quad L = \left(\frac{U_\infty}{C} \right)^{1/m}$$

Dans le cas $m = 0$ correspondant au bord d'attaque classique, cette longueur disparaît.

b) Une région couche-limite $\mathcal{D}_2$ où la solution est du type Falker-Skan (22)

$$(22) \quad \begin{cases} \bar{\psi}_2 = k \bar{x}_2^{(m+1)/2} f(\eta) \\ \eta = k' \bar{y}_2 \bar{x}_2^{(m-1)/2} \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} f(\eta) \sim \eta^2 & \text{lorsque } \eta \rightarrow 0 \\ f(\eta) \sim \eta & \text{lorsque } \eta \rightarrow \infty \end{cases}$$

c) Une région Navier-Stokes $\mathcal{D}_1$ dont les caractéristiques sont définies par les raccords $\mathcal{D}_1 \leftrightarrow \mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_1 \leftrightarrow \mathcal{D}_2$.

Dans le domaine $\mathcal{D}_3$ on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_3 = 0 \\ q_3 = 0 \\ r_3 = 1 \\ \alpha_3 = \frac{\alpha}{\pi - \alpha} \\ \beta_3 = 1 \end{array} \right.$$

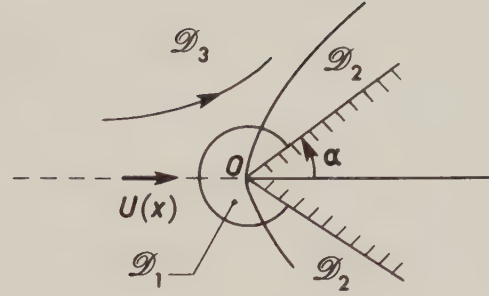


Figure IV, 7.

L'utilisation du tableau II conduit alors à l'expression (23) de q_1 :

(23)

$$q_1 = 1 - \frac{\alpha}{\pi}$$

Le raccord $\mathcal{D}_1 \leftrightarrow \mathcal{D}_2$ peut être exprimé de 3 façons, comme dans le problème du bord d'attaque classique ; les couples de valeurs de α_2, β_2 correspondant à ces cas sont les suivantes :

En suivant une
ligne $\eta = \text{cste}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = \frac{m+1}{2} = \frac{\pi}{2(\pi - \alpha)} \\ \beta_2 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{1 + \beta_2}{\alpha_2 + \beta_2} = 2 \left(1 - \frac{\alpha}{\pi} \right)$$

En suivant
la paroi
($\eta \rightarrow 0$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = \frac{3m-1}{2} = \frac{4\alpha - \pi}{2(\pi - \alpha)} \\ \beta_2 = 2 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{1 + \beta_2}{\alpha_2 + \beta_2} = 2 \left(1 - \frac{\alpha}{\pi} \right)$$

($\eta \rightarrow \infty$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = m = \frac{\alpha}{\pi - \alpha} \\ \beta_2 = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{1 + \beta_2}{\alpha_2 + \beta_2} = 2 \left(1 - \frac{\alpha}{\pi} \right)$$

Connaissant de plus les valeurs $p_2 = 1/2$, $q_2 = 0$, $r_2 = 0$, on en déduit par utilisation du tableau II, la valeur de q_1 . Il s'avère que dans les 3 cas on obtient la même valeur que celle obtenue par le raccord $\mathcal{D}_1 \leftrightarrow \mathcal{D}_3$

$$q_1 = 1 - \frac{\alpha}{\pi}$$

Proposition 19.

Au voisinage d'un bord d'attaque anguleux de demi angle au sommet α , il existe une zone Navier-Stokes dont les dimensions caractéristiques sont :

$$L_{x_1} = L_{y_1} = \frac{L}{R^{1-(\alpha/\pi)}}$$

Ici aussi, on dispose d'un nombre surabondant de données pour déterminer q_1 et on peut faire un raisonnement analogue à celui du § IV, 1.2.3 permettant de retrouver la forme (22) de la solution de Falker-Skan.

Remarquons que pour $\alpha = 0$ on retrouve la valeur correspondant au bord d'attaque aigu (Proposition 17) et que pour la valeur remarquable de $\alpha = \pi/2$ correspondant au problème du point d'arrêt, on obtient

$L_{x_1} = L_{y_1} = \frac{L}{\sqrt{R}}$, c'est-à-dire la même dimension caractéristique que l'épaisseur de la couche-limite : Si on remarque, de plus que, dans ce cas, la solution de couche-limite ne présente aucune singularité en O , on peut penser que la présence d'un domaine Navier-Stokes n'est pas nécessaire. On sait que le calcul de la solution de couche-limite conduit effectivement à la conclusion que cette solution est également solution des équations complètes de Navier-Stokes. L'existence de $\mathcal{D}_1$ est donc purement formelle, la solution dans cette zone étant confondue, en première approximation au moins, avec le prolongement dans $\mathcal{D}_1$ de la solution de couche limite : C'est un premier exemple de ce que l'on nomme dans la suite, une singularité "artificielle".

IV, 3. — ÉTUDE LOCALE DES ÉQUATIONS DE LA COUCHE LIMITE.

Considérons un domaine $\mathcal{D}_2$ où sont valables les équations de Prandtl ($\epsilon_2 = 1$, $\lambda_2 \ll 1$). Nous nous proposons de rechercher de quelle équation $\bar{\psi}_2$ est solution dans un domaine $\mathcal{D}_1$ ayant même dimension caractéristique L_{y_1} que $\mathcal{D}_2$, mais de dimension longitudinale L_{x_1} beaucoup plus petite que L_{x_2} (cf. fig. IV, 8).

Nous sommes amenés à poser $L_{x_1} = \lambda_2^n L_{x_2}$ ($n > 0$) et le domaine $\mathcal{D}_1$ est décrit au moyen des fonctions et variables suivantes :

$$(24) \quad \begin{cases} \bar{\psi}_1 = \bar{\psi}_2 \\ \bar{x}_1 = \frac{\bar{x}_2}{\lambda_2^n} \\ \bar{y}_1 = \bar{y}_2 \end{cases}$$

A l'échelle (2) de la couche limite, le domaine $\mathcal{D}_1$ est donc une ligne choisie comme ligne $\bar{x}_2 = 0$ et plusieurs cas sont à considérer :

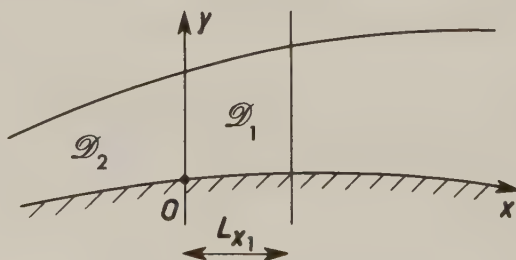


Figure IV, 8.

IV, 3. 1. — Singularité artificielle : la ligne $\mathcal{D}_1$ ne présente aucune singularité pour la solution $\bar{\psi}_2$. (En particulier, le gradient de pression extérieure reste borné).

Il est clair, dans ces conditions, que l'équation (25) de Prandtl est valable dans $\mathcal{D}_1$, qui peut être considéré comme faisant partie de $\mathcal{D}_2$.

$$(25) \quad \left(\frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \bar{y}_2} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} - \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \bar{x}_2} \frac{\partial}{\partial \bar{y}_2} \right) \left(\frac{\partial^2 \bar{\psi}_2}{\partial \bar{y}_2^2} \right) = \frac{\partial^4 \bar{\psi}_2}{\partial \bar{y}_2^4}$$

Il est intéressant toutefois de rechercher l'évolution, sur une courte distance ($= L_{x_1}$), du profil de couche-limite initial, c'est-à-dire de rechercher un développement limité de $\bar{\psi}_2$ autour de $\bar{x}_2 = 0$. Il suffit pour cela de faire, dans (25), le changement de variable défini par (24) ; on obtient ainsi (26) :

$$(26) \quad \left(\frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \bar{y}_1} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} - \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \bar{x}_1} \frac{\partial}{\partial \bar{y}_1} \right) \left(\frac{\partial^2 \bar{\psi}_1}{\partial \bar{y}_1^2} \right) = \lambda_2^2 \frac{\partial^4 \bar{\psi}_1}{\partial \bar{y}_1^4}$$

Comme par hypothèse n est positif et $\lambda_2 \ll 1$, le second membre de (26) est négligeable devant le premier, si bien qu'on retrouve, en première approximation, l'équation d'Euler unidimensionnelle (27)

$$(27) \quad \frac{\partial^2 \bar{\psi}_1}{\partial \bar{y}_1^2} = f(\bar{\psi}_1).$$

Sur une courte distance, l'influence des termes visqueux est donc négligeable. D'où le résultat ci-dessous :

Proposition 20.

En l'absence de toute singularité, la solution des équations de Prandtl est asymptotiquement solution des équations d'Euler unidimensionnelles si on se limite à des déplacements longitudinaux petits devant la dimension longitudinale caractéristique de la couche limite.

On peut donc remplacer, sur une courte distance, les équations de Prandtl par celles d'Euler, le tourbillon, non nul, se conservant sur chaque ligne de courant. La condition d'adhérence à la paroi n'a pas à être écrite : elle se trouve automatiquement satisfaite en première approximation. Il est très simple d'ailleurs, de vérifier cette propriété sur l'exemple de la solution de Blasius pour la plaque plane semi-infinie.

IV, 3. 2. — Il existe, sur la ligne $\mathcal{D}_1$, une singularité ponctuelle à la paroi.

a) Si les équations de Prandtl sont valables dans $\mathcal{D}_1$ excepté au voisinage du point singulier, le raisonnement fait en IV, 3.1 reste valable et on peut appliquer la proposition 20. Toutefois, une remarque doit être faite. La singularité à la paroi $\mathcal{D}_3$ est un point à l'échelle 2, par hypothèse, et, dans le changement d'échelle défini par les formules (24) elle peut, à l'échelle 1, rester un point, ou, le plus souvent, devenir une ligne $\bar{y}_1 = 0$, c'est-à-dire jouer, pour le domaine $\mathcal{D}_1$, le rôle d'une singularité tangentielle (cf. figure IV, 9)

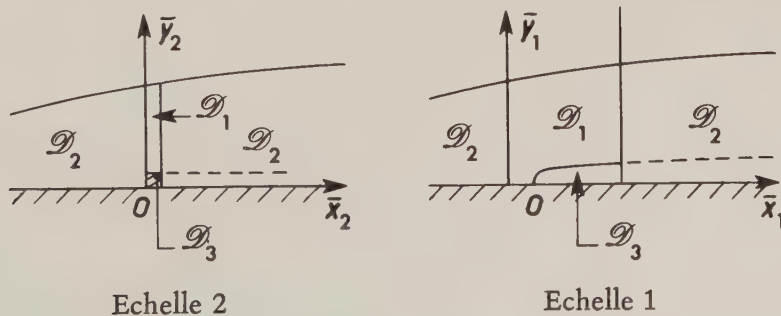


Figure IV, 9.

On peut donc s'attendre à ce que la proposition (20) ne soit applicable que dans le domaine $\mathcal{D}_1$ "extérieur", le voisinage $\mathcal{D}_3$ de la paroi étant exclu.

Plus précisément, les équations de la couche-limite étant de nature parabolique, la condition d'adhérence à la paroi, dans le domaine $\mathcal{D}_1$, ne sera automatiquement satisfaite par la solution d'Euler prolongement dans $\mathcal{D}_1$ de la solution de couche-limite, qu'à l'amont du point O , et on peut s'attendre, à l'aval de celui-ci, à la présence d'une sous-couche limite nécessaire pour satisfaire cette condition d'adhérence ; cette sous-couche limite peut éventuellement se prolonger, à l'aval, dans le domaine $\mathcal{D}_2$.

b) Si les équations de Prandtl cessent d'être valables dans $\mathcal{D}_1$, ce domaine qui, rappelons-le, est une ligne à l'échelle (2), constitue une singularité normale pour la solution de couche-limite et nous allons maintenant envisager ce cas.

IV, 3. 3. — $\mathcal{D}_1$ est une ligne singulière (singularité normale).

Conformément au schéma de la figure IV,10, il faut écrire dans ce cas un double raccord :

— Raccord $\mathcal{D}_2 \leftrightarrow \mathcal{D}_1$ où $\mathcal{D}_2$ est le domaine décrit par les équations de Prandtl. Ce raccord peut être exprimé en utilisant la planche IV correspondant aux singularités normales.

— Raccord $\mathcal{D}_3 \leftrightarrow \mathcal{D}_1$ où $\mathcal{D}_3$ est le domaine extérieur de fluide parfait ; Il est clair qu'à l'échelle (3), le domaine $\mathcal{D}_1$ est un point et on doit donc utiliser la planche II (singularité ponctuelle) pour exprimer ce raccord.

— Il y a lieu enfin de remarquer que le raccord $\mathcal{D}_2 \leftrightarrow \mathcal{D}_3$ est supposé déjà écrit, conformément aux résultats de II.5.1. En nous limitant au cas des comportements algébriques, on a ainsi :

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_3 = 0 \\ q_3 = 0 \\ r_3 = 1 \\ \beta_3 = 1 \\ \alpha_3 = \alpha_2^* \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} p_2 = 1/2 \\ q_2 = 0 \\ r_2 = 0 \\ \beta_2 = 0 \\ \alpha_2 = \alpha_2 \end{array} \right.$$

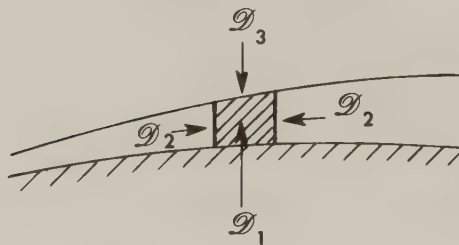


Figure IV, 10.

* L'égalité $\alpha_2 = \alpha_3$ provient de notre hypothèse de comportement algébrique au voisinage de la singularité normale ; En effet, on a les comportements suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi}_2 \sim \bar{x}_2^{\alpha_2} B(\bar{y}_2) \\ \bar{\psi}_3 \sim \bar{x}_3^{\alpha_3} \bar{y}_3 \end{array} \right.$$

La première expression étant valable pour tout $\bar{y}_2$, on doit retrouver, lorsque $\bar{y}_2 \rightarrow \infty$ un comportement compatible avec la solution extérieure $\bar{\psi}_3$ pour $\bar{y}_3 \rightarrow 0$, ce qui entraîne l'égalité des coefficients α_2 et α_3 .

Il reste donc, dans le problème, le seul paramètre $\alpha_2 = \alpha_3$ qui caractérise le comportement local de la vitesse extérieure (région $\mathcal{D}_3$). Examinons maintenant toutes les descriptions possibles de $\mathcal{D}_1$, telles qu'elles résultent des tableaux II et IV.

IV, 3. 3. 1. – Cas $\alpha_2 = \alpha_3 > 1$: $\mathcal{D}_1$ est décrit par l'équation de Stokes.

L'utilisation du tableau II montre que $\mathcal{D}_1$ ne peut être décrit que par les équations de Stokes bidimensionnelles ou de Navier-Stokes. En imposant de plus $\alpha_2 = \alpha_3 > 1$, le tableau IV montre que $\mathcal{D}_1$ ne peut être décrit que par l'équation de Stokes. Le double raccord $\mathcal{D}_1 \leftrightarrow \mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_1 \leftrightarrow \mathcal{D}_3$ est possible et conduit aux caractéristiques suivantes de $\mathcal{D}_1$:

$$p_1 = 0 \quad q_1 = 1/2 \quad r_1 = \frac{1}{2} (1 - \alpha_3)$$

Il est intéressant d'interpréter la condition $\alpha_3 > 1$. La vitesse à la paroi, à l'échelle (3), c'est-à-dire dans la région fluide parfait $\mathcal{D}_3$, est de la forme $u_e \sim x^{\alpha_3}$.

Dans le cas où l'écoulement dans $\mathcal{D}_3$ est *potentiel*, un tel comportement est caractéristique de l'écoulement le long des parois d'un dièdre de demi-angle au sommet α (cf. fig. IV, 11) tel que :

$$\alpha_3 = \frac{\alpha}{\pi - \alpha} \quad (\text{formule (19)})$$

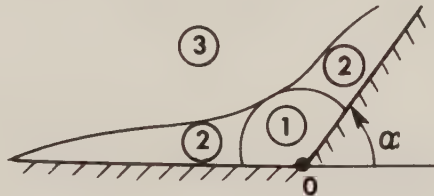


Figure IV, 11.

La condition $\alpha_3 > 1$ impose donc $\alpha > \frac{\pi}{2}$.

Proposition 21.

Au voisinage d'une singularité caractérisée par le fait que la vitesse dans l'écoulement de fluide parfait se comporte comme $u_e \sim \bar{x}^{\alpha_3}$ avec $\alpha_3 > 1$, les équations de la couche limite doivent être remplacées par l'équation de Stokes dans un domaine de dimension caractéristique $LR^{-1/2}$, autour de ce point, égale à l'épaisseur locale de la couche limite ; c'est en particulier le cas si l'écoulement extérieur est irrotationnel et subit une déviation $\alpha > \pi/2$ (figure IV, 12).

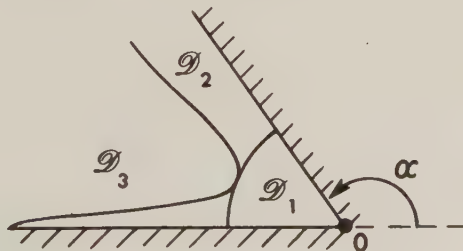


Figure IV, 12.

IV, 3. 3. 2. – Cas $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$. $\mathcal{D}_1$ est décrit par les équations de Navier-Stokes.

Un raisonnement identique à celui fait en IV,3.3.1 montre que le double raccord $\mathcal{D}_1 \leftrightarrow \mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_1 \leftrightarrow \mathcal{D}_3$ est encore possible si $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$ et conduit aux valeurs :

$$p_1 = 0, \quad q_1 = 1/2, \quad r_1 = 0.$$

Proposition 22.

Au voisinage d'un point caractérisé par le fait que la vitesse dans l'écoulement de fluide parfait se comporte comme $u_e \sim \bar{x}$, les équations de la couche limite doivent être remplacées par celles de Navier-Stokes dans un domaine de dimension caractéristique $LR^{-1/2}$; c'est en particulier le cas dans un problème analogue à celui du point d'arrêt ou l'écoulement extérieur, irrotationnel, subit une déviation égale à $\pi/2$ (fig. IV,13).

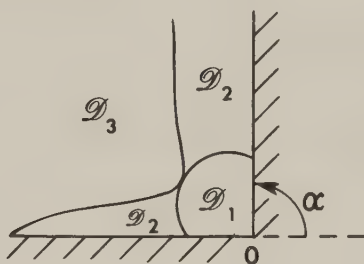


Figure IV, 13.

Remarque :

Dans le problème du point d'arrêt, envisagé en IV,2, on sait qu'il s'agit d'une singularité artificielle, les équations de couche-limite étant prolongeables dans $\mathcal{D}_1$. Dans le problème envisagé ici, il est possible que ce soit également le cas, bien que rien ne le prouve de façon certaine.

IV, 3. 3. 3. – Cas $\alpha_2 = \alpha_3 < 1$. $\mathcal{D}_1$ est décrit par les équations d'Euler bidimensionnelles.

Le raisonnement est encore le même et donne :

$$(29) \quad p_1 = 0, \quad q_1 = 1/2, \quad r_1 = \frac{1}{2} (1 - \alpha_3)$$

Proposition 23.

Au voisinage d'une singularité caractérisée par le fait que la vitesse dans l'écoulement de fluide parfait se comporte comme $u_e \sim \bar{x}^{\alpha_3}$ avec $\alpha_3 < 1$, les équations de la couche limite doivent être remplacées par

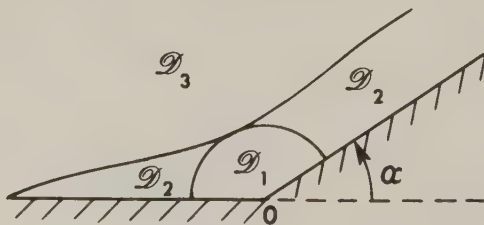


Figure IV, 14.

celles d'Euler bidimensionnelles dans un domaine de dimension caractéristique $LR^{-1/2}$. C'est en particulier le cas pour un écoulement potentiel subissant une déviation $\alpha < \pi/2$. (figure IV,14).

Ce résultat appelle quelques remarques :

Remarque 1.

Tout d'abord il n'y a lieu d'appliquer la proposition 23 que si l'on est assuré qu'il y a bien une singularité normale pour la solution de couche-limite . C'est effectivement le cas si l'angle α est non nul, c'est-à-dire s'il y a *changement de direction de l'écoulement extérieur*, mais dans le cas où $\alpha = 0$, on ne peut pas affirmer qu'il y a singularité normale et il est beaucoup plus naturel, au contraire, de penser qu'une telle singularité n'existe pas et d'appliquer la proposition 20 . Une telle éventualité se présente dans l'écoulement au voisinage d'un bord de fuite ou même, si α est négatif, dans le cas où il y a séparation de l'écoulement au point anguleux, la ligne de jet étant dans le prolongement de la paroi (cf. figure IV,15) . Nous reviendrons, plus loin, sur de tels écoulements.

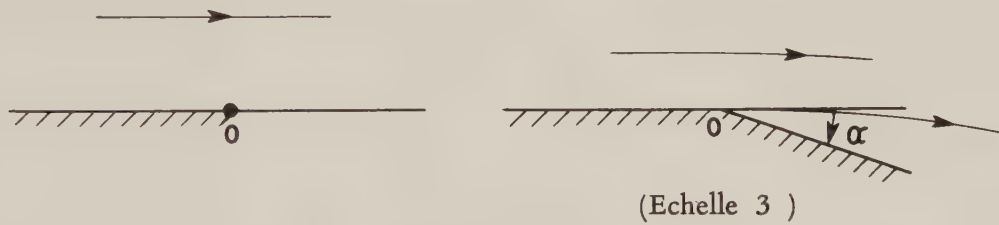


Figure IV, 15.

Remarque 2.

$\mathcal{D}_1$ étant décrit par les équations d'Euler, et le cas d'une singularité artificielle étant écarté, la condition d'adhérence à la paroi n'est plus satisfaite . Nous nous plaçons alors à l'échelle 1 de $\mathcal{D}_1$ et deux cas peuvent se présenter :

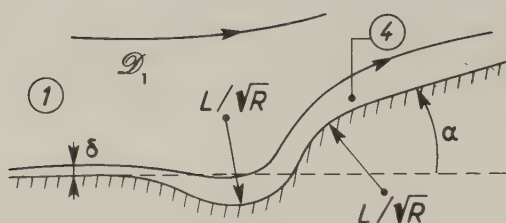
Cas 1 La discontinuité de pente qui existait à l'échelle 3 disparaît à l'échelle 1 : ceci se produit si le rayon de courbure de la paroi au voisinage du point anguleux est d'ordre $LR^{-1/2}$, c'est-à-dire comparable à l'épaisseur locale de la couche-limite, la direction finale de l'écoulement étant définie par l'angle α , (cf. figure IV,16).

Dans ce cas, déjà étudié par NEILAND et SYCHEV [49], la seule façon d'écrire l'adhérence à la paroi est d'introduire une *sous-couche-limite* (région $\mathcal{D}_4$) dont l'origine, à l'échelle 1, est rejetée à l'infini amont. Les caractéristiques de cette sous-couche-limite sont obtenues facilement à partir de celles (29) de la région $\mathcal{D}_1$ et du tableau III :

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_4 = \frac{1 - \alpha_3}{4} \\ q_4 = 1/2 \\ r_4 = 0 \end{array} \right.$$

En particulier, l'épaisseur δ de la sous-couche-limite est donnée par :

$$(31) \quad \delta = LR^{-p_4 - q_4} = LR^{-(3/4) + (\alpha_3/4)}$$



(Echelle 1)

Figure IV, 16.

Les formules (30) et (31) paraissent en contradiction avec celles de Neiland et Sychev [49] qui donnent $p_4 = 1/4$ et $\delta = LR^{-3/4}$: Elles en sont, en fait, une généralisation, ainsi qu'on va le montrer maintenant.

Envisageons en effet l'ordre de grandeur des variations de pression dans $\mathcal{D}_1$. D'après le tableau I, on a :

$$\frac{p_0}{\rho_\infty U_\infty^2} = \frac{1}{\epsilon_1^2 \theta_1^2 R^2} ,$$

et, en utilisant (29), il vient :

$$\frac{p_0}{\rho_\infty U_\infty^2} = R^{-\alpha_3}$$

Comme α_3 est positif pour $\alpha > 0$, les variations de pression sont donc très petites, ce qui traduit le fait physique que la vitesse, en fluide parfait, s'annule au sommet d'un angle.

Dans leur travail, NEILAND et SYCHEV supposent que ces variations de pression sont d'ordre unité, ce qui implique $\alpha_3 = \alpha = 0$. On voit donc qu'il n'y a pas de contradiction avec le résultat obtenu par ces auteurs, mais que le travail présenté ici est plus général puisqu'on ne suppose pas que la direction finale de l'écoulement soit $\alpha = 0$.

Cas 2 La discontinuité de pente qui existait à l'échelle 3 existe toujours à l'échelle 1 : On est donc en présence d'un "vrai" point anguleux O de la paroi et il faut recommencer, pour la sous-couche-limite $\mathcal{D}_4$ le même raisonnement que pour la couche limite $\mathcal{D}_2$. Comme l'écoulement dans $\mathcal{D}_1$ est un écoulement de fluide parfait dans un angle qui a toujours pour valeur α , l'exposant caractéristique de la singularité normale pour $\mathcal{D}_4$ reste le même ($\alpha_3 = \alpha/(\pi - \alpha)$) et on définit ainsi, de proche en proche, une série de domaine de type Euler, notés maintenant $\mathcal{D}_n$, contigus à une série de sous-couches limites notés $\mathcal{D}_{n+1/2}$, conformément au schéma de la figure IV,17a. On peut s'attendre, d'ailleurs, à la même disposition de domaines à l'aval du point anguleux O (fig. IV,17b)*.

Il est intéressant, dans cette description, d'écrire les conditions de raccord entre les divers domaines et de voir si la suite $\mathcal{D}_n$ admet une limite.

Les raccords $\mathcal{D}_n \leftrightarrow \mathcal{D}_{n+1/2}$ sont du type "tangential" et imposent les relations :

* L'hypothèse de la présence d'une suite de domaines Euler et couche-limite a été faite par SYCHEV à propos du problème du bord de fuite et communiquée oralement à l'auteur. Le raisonnement a été refait ici dans le cas plus général de la déviation d'une couche-limite, et en insistant sur les hypothèses nécessaires à l'existence d'une telle description de l'écoulement (Suite de singularités normales avec même exposant caractéristique α_3).

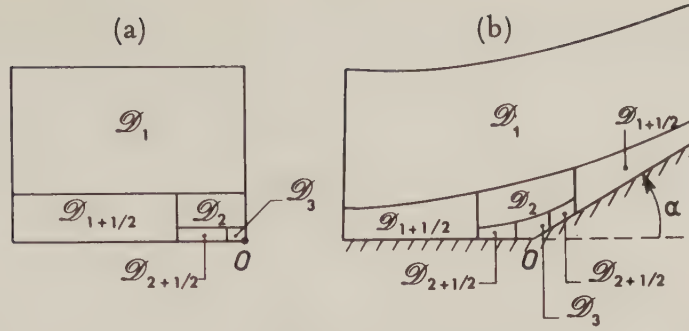


Figure IV, 17.

$$(31) \quad \begin{cases} q_{n+(1/2)} = q_n \\ p_{n+(1/2)} = \frac{r_n}{2} \end{cases}$$

Les raccords $\mathcal{D}_{n+1/2} \leftrightarrow \mathcal{D}_{n+1}$ sont du type "normal" et s'écrivent sous la forme (32) :

$$(32) \quad \begin{cases} p_{n+1} = 0 \\ q_{n+1} = p_{n+(1/2)} + q_{n+(1/2)} \\ r_{n+1} = p_{n+(1/2)} (1 - \alpha_3), \end{cases}$$

L'élimination entre (31) et (32) des quantités indicées $n + \frac{1}{2}$ conduit aux relations (33) qui permettent d'obtenir explicitement les caractéristiques du domaine $\mathcal{D}_{n+1}$ sous la forme (34), en tenant compte du fait que $p_1 = 0$, $q_1 = 1/2$, $r_1 = (1 - \alpha_3)/2$.

$$(33) \quad \begin{cases} p_{n+1} = 0 \\ q_{n+1} = q_n + \frac{r_n}{2} \\ r_{n+1} = r_n \left(\frac{1 - \alpha_3}{2} \right) \end{cases}$$

$$(34) \quad \begin{cases} p_{n+1} = 0 \\ q_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{1 - \xi^{n+1}}{1 - \xi} \\ r_{n+1} = \xi^{n+1} \end{cases}$$

Dans ces trois dernières formules on a, pour alléger l'écriture, introduit le paramètre ξ défini par (35) :

$$(35) \quad \xi = \frac{1 - \alpha_3}{2}$$

Comme, par hypothèse, α est compris entre 0 et $\pi/2$, $\alpha_3 = \frac{\alpha}{\pi - \alpha}$ est positif et par conséquent ξ est

inférieur à l'unité ce qui montre qu'il existe une limite, lorsque $n \rightarrow \infty$, donnée par les formules (36).

$$(36) \quad p_{\infty} = 0, \quad r_{\infty} = 0, \quad q_{\infty} = \frac{1}{2(1-\xi)} = \frac{1}{1+\alpha_3}$$

Exprimées en fonction de α , ces formules s'écrivent finalement :

$$p_{\infty} = 0, \quad r_{\infty} = 0, \quad q_{\infty} = 1 - \frac{\alpha}{\pi}$$

Ce résultat est remarquable car il montre qu'on retrouve asymptotiquement un domaine Navier-Stokes (du fait que $p_{\infty} = r_{\infty} = 0$), de dimension caractéristique $LR^{-q_{\infty}}$ où l'exposant q_{∞} a la même valeur $(1 - \frac{\alpha}{\pi})$ que dans le problème du bord d'attaque anguleux (formule (23)).

Proposition 24.

Dans l'hypothèse où il existe, au voisinage d'un point anguleux d'une paroi une succession de domaines de type Euler associés chacun à une sous-couche-limite, et dans l'hypothèse où toutes les sous-couches-limites présentent une singularité normale au voisinage du point anguleux, l'exposant caractéristique

$\alpha_3 = \frac{\alpha}{\pi - \alpha}$ de toutes les singularités étant le même, on retrouve asymptotiquement, au voisinage du point anguleux, un domaine Navier-Stokes de dimension caractéristique $LR^{-q_{\infty}}$ avec $q_{\infty} = 1 - \frac{\alpha}{\pi}$, valeur égale à celle obtenue dans le problème du bord d'attaque anguleux.

IV, 4. — PROBLÈME DU BORD DE FUITE.

IV, 4. 1. — Description fluide parfait-couche limite.

Dans la description classique, schématisée sur la figure IV,18, de l'écoulement symétrique au voisinage d'un bord de fuite, on distingue une région fluide parfait $\mathcal{D}_3$, une couche limite $\mathcal{D}_2$ décrite par la solution de Blasius jusqu'au bord de fuite, et un sillage $\mathcal{D}_4$, décrit également par les équations de Prandtl. La solution, dans cette zone, a été obtenue par GOLDSTEIN [27], sous forme d'un double développement :

– Un développement “interne”*, de la forme (37), valable seulement au voisinage du point O , c'est-à-dire pour les valeurs de η petites.

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi}_4 = \xi^2 f(\xi, \eta) \\ \eta = \bar{y}_4 \bar{x}_4^{-1/3} \\ \xi = \bar{x}_4^{1/3} \\ f(\xi, \eta) \sim f_0(\eta) + \xi f_1(\eta) + \dots \quad \text{lorsque} \quad \xi \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

* Nous employons ici la terminologie “interne”, “externe” par opposition aux termes “intérieur”, “extérieur” pour les développements asymptotiques, car, dans la solution de Goldstein, il n'y a pas de petit paramètre, ce rôle étant joué par la variable η ; KAPLUN-LAGERSTRÖM [33] et VAN DYKE [62] font la même distinction (“coordinate type expansion” et “parameter type expansion”).

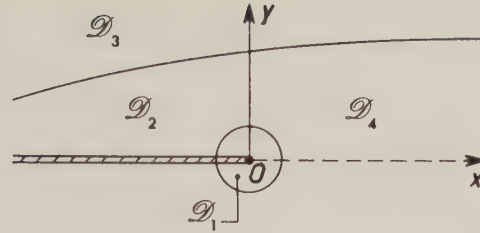


Figure IV, 18.

Les fonctions $f_n(\eta)$ vérifient les conditions (38) :

$$(38) \quad \begin{cases} f_n(\eta) \sim \eta & \text{lorsque } \eta \rightarrow 0 \\ f'_{3n}(\eta) \sim \eta^{3n+1} & \text{lorsque } \eta \rightarrow \infty \quad (\text{en particulier } f_0 \sim \eta^2) \end{cases}$$

Lorsque $\bar{x}_4 \rightarrow 0$, la solution $\bar{\psi}_4$ est donc de la forme (39) :

$$(39) \quad \bar{\psi}_4 \sim \bar{x}_4^{2/3} f_0\left(\frac{\bar{y}_4}{\bar{x}_4^{1/3}}\right) + \dots$$

– Ce développement se raccorde, pour les grandes valeurs de η , à un autre développement dit “externe” de la forme (40), et il s’avère que le premier terme $\bar{\chi}_0(\bar{y}_4)$ de ce développement, dans la solution de Goldstein, est identique au profil de Blasius au niveau du bord de fuite.

$$(40) \quad \bar{\psi}_4 = \bar{\chi}_0(\bar{y}_4) + \xi \bar{\chi}_1(\bar{y}_4) + \dots$$

La forme (39) de la solution au voisinage de O montre qu’il existe en ce point une singularité et que la description classique n’est pas uniformément valable. On peut s’attendre, par conséquent, à ce qu’il existe, au voisinage de O , un domaine $\mathcal{D}_1$ décrit par les équations de Navier-Stokes. En fait on peut envisager deux schémas différents que nous allons successivement examiner.

IV, 4. 2. – Présence d’une singularité ponctuelle.

Dans ce schéma on admet, comme dans le schéma classique, la validité de la description fluide parfait-couche limite du § IV,4.2, partout au voisinage de O excepté dans un domaine $\mathcal{D}_1$, très petit devant $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_4$, entourant O et décrit par les équations de Navier-Stokes. Les caractéristiques de ce domaine sont définies par le double raccord $\mathcal{D}_1 \leftrightarrow \mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_1 \leftrightarrow \mathcal{D}_4$.

D’après les hypothèses faites, $\bar{\psi}_2 \sim \bar{y}_2^2$ lorsque $\bar{x}_2 \rightarrow 0$ (frottement à la paroi fini au point O , donné par la solution de Blasius) ; on a, par conséquent :

$$p_2 = 1/2, \quad q_2 = 0, \quad r_2 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta_2 = 2$$

Le raccord $\mathcal{D}_1 \leftrightarrow \mathcal{D}_2$, donné par le tableau II, impose alors les conditions suivantes :

$$(41) \quad \boxed{p_1 = 0, \quad q_1 = 3/4, \quad r_1 = 0}$$

Comme pour le problème du bord d'attaque, le raccord $\mathcal{D}_1 \leftrightarrow \mathcal{D}_4$ dépend de la façon dont on s'approche du point O ; les trois possibilités sont résumées par les formules (42) :

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{ll} p_4 = 1/2, & q_4 = r_4 = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \alpha_4 = 2/3 \\ \beta_4 = 0 \end{array} \right\} \text{ si } \eta = \text{cste}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} p_4 = 1/2, & q_4 = r_4 = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \alpha_4 = 1/3 \\ \beta_4 = 1 \end{array} \right\} \text{ si } \eta \rightarrow 0$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} p_4 = 1/2, & q_4 = r_4 = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \alpha_4 = 0 \\ \beta_4 = 2 \end{array} \right\} \text{ si } \eta \rightarrow \infty$$

Dans les 3 cas le rapport $\frac{1 + \beta_4}{\alpha_4 + \beta_4}$ possède la même valeur $3/2$ si bien que le raccord $\mathcal{D}_1 \leftrightarrow \mathcal{D}_4$ est effectivement possible quel que soit la façon dont on s'approche de O , et l'utilisation du tableau II redonne les valeurs (41) obtenues par raccord amont ($\mathcal{D}_1 \leftrightarrow \mathcal{D}_2$).

Proposition 25.*

Dans l'hypothèse d'une singularité ponctuelle, il existe, au bord de fuite, un domaine Navier-Stokes $\mathcal{D}_1$ de dimension caractéristique $LR^{-3/4}$, satisfaisant simultanément aux conditions de raccord avec la couche limite à l'amont et le sillage à l'aval.

IV, 4. 3. – Hypothèse d'une singularité normale.

Le résultat qui vient d'être formulé a été mis en doute par Sychev. Cet auteur pense que les équations de la couche limite cessent d'être valables au voisinage de O dans une zone plus étendue d'ordre de grandeur $LR^{-1/2}$ où elles doivent être remplacées par les équations d'Euler. Dans cette description, effectivement possible, on retrouve la succession de domaines Euler-sous couche limite telle qu'elle a été présentée en IV, 3. 3.3, et on fait donc l'hypothèse qu'il existe pour la couche-limite $\mathcal{D}_2$ une singularité normale. L'exposant α de la singularité ne peut être que zéro puisqu'il n'y a pas de déviation de l'écoulement extérieur, de telle sorte que la proposition 24 nous conduit à envisager la présence d'une zone Navier-Stokes de dimension caractéristique $LR^{-1} = \nu/U_\infty$ (puisque $q_\infty = 1$ pour $\alpha = 0$).

Il ne semble pas que cette description corresponde à la réalité pour plusieurs raisons :

1) *A priori*, il est improbable qu'il existe dans ce problème une singularité normale pour les équations de couche limite, au moins en première approximation. En effet, pour $\alpha = 0$, il n'y a pas en fait de singularité, et si on retrouve bien formellement les équations d'Euler dans un domaine de dimension $LR^{-1/2}$, on doit plutôt être dans un cas d'application de la proposition 20 correspondant à une singularité artificielle.

2) *A posteriori*, on voit mal comment raccorder cette description, à l'aval, avec la solution (37) de Goldstein pour le sillage proche. En effet :

* Ce résultat avait déjà été obtenu par M. VAN DYKE et S.A. BERGER par la seule considération du raccord amont.

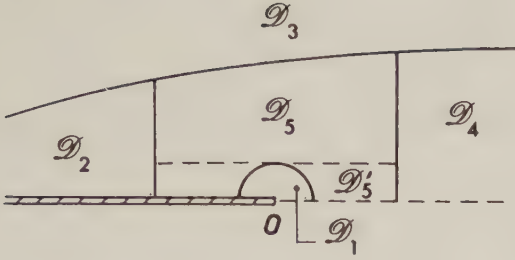


Figure IV, 19.

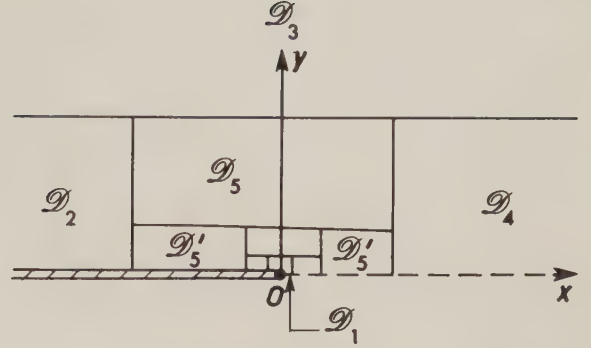


Figure IV, 20.

a) Le raccord direct de la zone Navier-Stokes avec la solution (37) n'est pas possible puisqu'il conduit à $q_1 = 3/4$ alors qu'à l'amont on avait obtenu $q_1 = 1$. Il existe donc au moins une zone intermédiaire.

b) Cette zone intermédiaire, au moins en ce qui concerne la partie externe de la couche-limite, ne peut être que la première zone de type Euler (région $\mathcal{D}_5$ de la figure IV,19), que l'on a introduit à l'amont.

Les caractéristiques de la région $\mathcal{D}_5$, par suite du raccord amont ($\mathcal{D}_2 \leftrightarrow \mathcal{D}_5$) sont données par les formules (43) :

$$(43) \quad \begin{cases} p_s = 0 \\ q_s = 1/2 \\ r_s = 1/2 \end{cases}$$

Le raccord aval ($\mathcal{D}_5 \leftrightarrow \mathcal{D}_4$) conduit, de même, dans les trois cas possibles résumés par les formules (42), aux valeurs (44) ci-après :

$$(44) \quad \begin{cases} p_s = 0 \\ q_s = 1/2 \\ r_s = \begin{cases} 1/6 & \text{si } \eta = \text{cste} \\ 1/3 & \text{si } \eta \rightarrow 0 \\ 1/2 & \text{si } \eta \rightarrow \infty \end{cases} \end{cases}$$

La comparaison de (43) et (44) montre que le raccord $\mathcal{D}_4' \leftrightarrow \mathcal{D}_5$ n'est effectivement possible qu'avec la partie externe du sillage ($\eta \rightarrow \infty$), et qu'il doit donc exister une sous couche limite pour la partie interne (région $\mathcal{D}_5'$ de la figure IV,19). Il est facile de constater qu'à son tour cette sous couche limite, qui peut être raccordée à $\mathcal{D}_4$ et $\mathcal{D}_5$, ne se raccorde pas directement à $\mathcal{D}_1$ et on est finalement conduit à envisager, à l'aval, la même succession de domaine de type Euler, couche-limite qu'à l'amont (cf. figure IV,20).

Dans cette description, on obtient bien asymptotiquement, comme à l'amont, un domaine Navier-Stokes avec $q_1 = q_\infty = 1$.

c) Examinons alors plus en détail la région $\mathcal{D}_5$ où on a à résoudre l'équation d'Euler (45)

$$(45) \quad \Delta \bar{\psi}_s = f(\bar{\psi}_s)$$

Les conditions limites pour $\bar{\psi}_5$ sont les suivantes :

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \bar{\psi}_5 = 0 & \text{sur } \bar{y}_5 = 0 \\ \bar{\psi}_5 \sim \bar{y}_5 - \beta + \text{termes exponentiellement petits lorsque } \bar{y}_5 \rightarrow +\infty \\ \bar{\psi}_5 \sim \chi_0(\bar{y}_5) & \text{pour } \bar{x}_5 \rightarrow -\infty \\ \bar{\psi}_5 \sim \chi_0(\bar{y}_5) & \text{pour } \bar{x}_5 \rightarrow +\infty \end{array} \right.$$

La deuxième condition (46) provient du fait que le profil de vitesse tend exponentiellement vers le profil de fluide parfait lorsque $\bar{y}_5 \rightarrow \infty$ (cf. [20]), β désignant l'épaisseur de déplacement de la couche limite au niveau du bord de fuite.

– La troisième condition (46) exprime le raccord amont avec le profil de couche limite au niveau du bord de fuite.

– La quatrième condition (46) exprime de même le raccord aval avec la solution “externe” (40) de Goldstein : Il s'avère en effet que si on écrit cette solution en variables intérieures $(\bar{x}_5, \bar{y}_5)$, le terme d'ordre 1 du développement obtenu n'est autre que $\chi_0(\bar{y}_5)$.

Une solution évidente au problème (45)-(46) est donné par (47)*

$$(47) \quad \bar{\psi}_5 \equiv \chi_0(\bar{y}_5)$$

qui exprime que le profil initial de couche limite reste invariant à la traversée de la région Euler $\mathcal{D}_5$, au moins en première approximation. Dans ces conditions la condition d'adhérence à la paroi est automatiquement satisfaite et il n'y a pas lieu d'introduire la sous-couche limite $\mathcal{D}'_5$ à l'amont du bord de fuite ni la succession de domaines Euler-couche limite conduisant à $q_\infty = 1$. On trouve, par contre, que le domaine $\mathcal{D}_1$ doit être raccordée directement à la solution (47) ce qui redonne $q_1 = 3/4$.

En conclusion, il n'y a pas de singularité normale pour les équations de la couche limite et le domaine Navier-Stokes a bien pour dimension caractéristique $LR^{-3/4}$.

IV, 4. 4. – Interprétation des solutions “interne” et “externe” de Goldstein.

Nous avons vu au § IV,3.2 qu'une singularité ponctuelle, dans une couche limite devait le plus souvent donner naissance, à l'aval, à une sous couche-limite. Ce fait se produit effectivement au bord de fuite d'après l'analyse que nous venons de faire de la région $\mathcal{D}_5$, et le raccord $\mathcal{D}_5 \leftrightarrow \mathcal{D}'_5$ (cf. figure IV,21) nous permet d'obtenir les caractéristiques de $\mathcal{D}'_5$:

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} q'_5 = 1/2 \\ p'_5 = 1/6 \\ r'_5 = 0 \end{array} \right.$$

* Un théorème d'unicité peut être obtenu facilement lorsque f' est positif ; Malheureusement, dans le cas présent d'un profil initial de type Blasius f' est négatif dans tout l'intervalle $[0, +\infty[$ et un tel théorème semble difficile à établir.

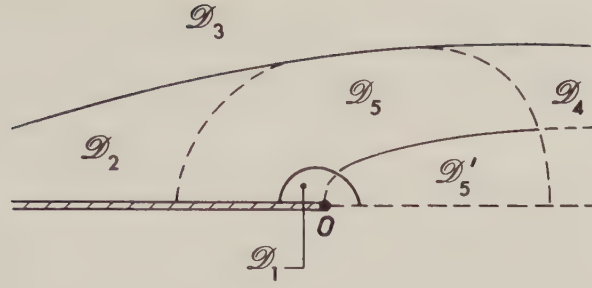


Figure IV, 21.

Cette région se raccorde bien, comme on le vérifie immédiatement avec le domaine Navier-Stokes $\mathcal{D}_1$, sous réserve que soit satisfaite la condition $\frac{1 + \beta'_5}{\alpha'_5 + \beta'_5} = \frac{3}{2}$.

On peut alors refaire, dans ce cas, un raisonnement analogue à celui fait au § IV,1.2.3 permettant de prévoir la forme des solutions semblables dans la région $\mathcal{D}'_5$ et on est conduit au résultat :

$$(49) \quad \bar{\psi}'_5 = \bar{x}'_5{}^{2/3} f_0\left(\frac{\bar{y}'_5}{\bar{x}'_5{}^{1/3}}\right)$$

et la fonction f_0 vérifie la même équation que celle obtenue par Goldstein (solution (39)).

Si on récapitule d'autre part les caractéristiques des trois régions $\mathcal{D}_4$, $\mathcal{D}_5$, $\mathcal{D}'_5$, il apparaît que les changements d'échelle effectués sont tels que :

$$(50) \quad \begin{cases} \bar{x}_5 = \bar{x}'_5 = \bar{x}_4 R^{1/2} \\ \bar{y}_5 = \bar{y}'_5 R^{-1/6} = \bar{y}_4 \\ \bar{\psi}_5 = \bar{\psi}'_5 R^{1/3} = \bar{\psi}_4 \end{cases}$$

Par substitution dans (49), on obtient alors :

$$\bar{\psi}_4 = \bar{x}_4{}^{2/3} f_0\left(\frac{\bar{y}_4}{\bar{x}_4{}^{1/3}}\right)$$

On obtient donc exactement la formule (39), ce qui prouve que la solution (49) est simplement le prolongement dans $\mathcal{D}'_5$ de la solution "interne" (39) de Goldstein écrite en variables couche-limite habituelles. Nous avons vu d'autre part que la solution dans $\mathcal{D}_5$ était également le prolongement dans cette région de la solution "externe" (40).

Proposition 26.

Le premier terme de la solution "interne" de Goldstein est en fait le premier terme d'un développement asymptotique "intérieur" valable dans une région $\mathcal{D}'_5$ caractérisée par les valeurs (48) des paramètres p , q , r , région décrite par les équations de Prandtl. De même le premier terme du développement "externe" est le premier terme d'un développement asymptotique "extérieur", valable dans une région $\mathcal{D}_5$ caractérisée par les valeurs (43) des paramètres p , q , r , région décrite par l'équation d'Euler, où la solution est le prolongement de la solution de Blasius.

Il peut être intéressant, dans ces conditions, de reprendre complètement l'étude de Goldstein sur cette base de développements asymptotiques raccordés ("parameter like expansion"), qui permettrait, peut-être, de supprimer les singularités de la solution de Goldstein pour les approximations suivantes.

IV, 4. 5. — Études de la solution dans la région Navier-Stokes $\mathcal{D}_1$.

Comme en IV,1.3 pour le problème du bord d'attaque, on peut appliquer ici les résultats du chapitre III pour préciser le comportement $\bar{\psi}_1^0$ de la solution $\bar{\psi}_1$, dans $\mathcal{D}_1$, au voisinage de la paroi. La seule différence avec le problème du bord d'attaque réside dans l'écriture de la condition de raccord à l'infini avec la couche limite, les formules (13) du § IV,1.3.1 devant être remplacées par les suivantes :

$$(51) \quad \begin{cases} \bar{\psi}_2^0 \sim C\bar{y}_2^2 & \text{si } \bar{y}_2 > 0 \\ \bar{\psi}_2^0 \sim -C\bar{y}_2^2 & \text{si } \bar{y}_2 < 0 \end{cases}$$

Ces expressions représentent en effet les comportements des solutions de Blasius pour les deux couches-limites, de part et d'autre de la plaque, au voisinage du bord de fuite.

L'examen des formules (14) donnant le comportement à l'infini de $\bar{\psi}_1^0$ montre qu'il n'existe aucune solution, appartenant à la classe $\mathcal{F}_2$, ayant le comportement (51).

Proposition 27.

Dans le problème du bord de fuite, la solution $\bar{\psi}_1^0$, dans la région Navier-Stokes, au voisinage de la paroi appartient nécessairement à la classe $\mathcal{F}_1$ et non à $\mathcal{F}_2$; Elle est de la forme :

$$\bar{\psi}_1^0 = -4 \operatorname{Re} \left\{ iH_2 + \bar{y}_1 H_2 - \bar{y}_1 \frac{I_2}{\sqrt{z}} \right\}$$

où les fonctions indéterminées $H_2(z)$ et $I_2(z)$ doivent vérifier la condition à l'infini ci-dessous.

$$\lim_{\bar{x}_1 \rightarrow \infty} \left[\frac{2I_2(\bar{x}_1)}{\bar{x}_1^{3/2}} + \frac{4I_2'(\bar{x}_1)}{\sqrt{\bar{x}_1}} \right] = C$$

C étant la valeur du frottement à la paroi, au bord de fuite, donnée par la solution de Blasius.

L'expression obtenue pour $\bar{\psi}_1^0$, compte tenu du fait que, par construction, H_2 et I_2 sont développables en série de Taylor au bord de fuite, conduit à penser que le frottement à la paroi est singulier en O comme $1/\sqrt{\bar{x}_1}$; Pour en être certain, il faudrait connaître effectivement les coefficients du développement de Taylor de $I_2(z)$ en O , ce qui implique de résoudre les équations de Navier-Stokes dans $\mathcal{D}_1$. L'utilisation du modèle d'Oseen dans $\mathcal{D}_1$ a été envisagée par R.T. CHENG [8] et K. STEWARTSON [58] en utilisant deux linéarisations différentes des termes d'inertie. D'autre part, F.E. TALKE [59] a repris le même problème par une méthode de séries tronquées en utilisant les équations complètes de Navier-Stokes. Tous ces travaux viennent confirmer la présence d'une singularité en O , pour le frottement, de la forme $1/\sqrt{\bar{x}_1}$.

Chapitre V

DÉCOLLEMENT EN UN POINT DE COURBURE FINIE

V, 1. — GÉNÉRALITÉS.

Nous n'allons pas reprendre ici en détail la discussion du problème de la séparation d'une couche limite laminaire, ceci se trouvant fait dans l'important article de synthèse de BROWN et STEWARTSON [4], récemment paru. Nous rappelons seulement les deux questions, toujours non résolues, qui se posent à propos de ce problème, dans le cas d'un écoulement bidimensionnel, stationnaire et incompressible :

- 1) La solution des équations de la couche-limite possède-t-elle, ou non, une singularité au point O de décollement ?
- 2) Les équations de la couche limite sont-elles valables au voisinage du point de décollement, ou faut-il revenir aux équations complètes de Navier-Stokes. Ces deux questions ne sont évidemment pas indépendantes et sont liées à un autre problème très important qui est celui de l'*influence amont*, c'est-à-dire de la modification apportée, par la présence du décollement, à l'écoulement de fluide parfait (donc, aussi, de couche-limite), à l'amont du point de séparation.

Dans les paragraphes V,2 et V,3 nous allons utiliser les résultats des chapitres II et III pour une étude locale du point de séparation, tandis que le paragraphe V,4 sera consacré à une discussion des deux questions que nous venons d'énoncer.

V, 2. — ÉTUDE LOCALE DU POINT DE SÉPARATION.

V, 2. 1. — *Comportement des solutions de couche-limite.*

V, 2. 1. 1. — *Solution amont.*

L'étude des solutions de couche-limite au voisinage d'un point de séparation a été faite par plusieurs auteurs parmi lesquels il faut citer GOLDSTEIN [26], STEWARTSON [4], [57], et KAPLUN [33]. La lecture des travaux de ces auteurs montre de façon convaincante que *si le gradient de pression extérieur est fixé*, au niveau du point de séparation, et le profil de vitesse imposé au niveau de ce point, les équations de la couche-limite permettent de construire une solution, valable à l'amont du point de décollement O , et cette solution *possède une singularité algébrique en O* . Plus précisément, GOLDSTEIN [26] introduit les variables ξ et η définies par (1), et cherche, au voisinage de O , un développement de la forme (2)

$$(1) \quad \xi = \bar{x}_2^{1/4} \quad \eta = \frac{\bar{y}_2 \bar{x}_2^{-1/4}}{\sqrt{2}}$$

$$(2) \quad \bar{\psi}_2 = 2^{3/4} \xi^3 [f_0(\eta) + \xi f_1(\eta) + \xi^2 f_2(\eta) + \dots]$$

Les fonctions $f_r(\eta)$ vérifient les conditions (3), et il apparaît que, pour les grandes valeurs de $\bar{y}_2$, la solution “interne” (2) peut être raccordée à un développement “externe” de la forme (4) qui représente l’évolution du profil de couche-limite lorsque $\xi \rightarrow 0$.

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_0 \equiv \frac{\eta^3}{6} \\ f_1 \equiv \alpha_1 \eta^2 \\ f_r \sim \eta^2 \quad \text{lorsque} \quad \eta \rightarrow 0 \\ f_r \sim \eta^{r+3} \quad \text{lorsque} \quad \eta \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

$$(4) \quad \bar{\psi}_2 = \chi_0(\bar{y}_2) + \xi^2 \chi_2(\bar{y}_2) + \xi^3 \chi_3(\bar{y}_2) + \dots$$

Cette théorie a été reprise et modifiée par STEWARTSON [57] qui a montré la nécessité d’introduire dans le développement (2) des termes logarithmiques en ξ à partir du terme ξ^8 . Nous ne tiendrons pas compte, dans notre étude, de cette modification qui n’intervient qu’aux approximations d’ordre supérieur.

A côté de cette solution que nous nomerons “singulière”, il est possible de construire une solution des équations de la couche-limite, “régulière” au voisinage du point de décollement, c’est-à-dire développable en double série de Taylor par rapport aux variables $\bar{x}_2, \bar{y}_2$. Toutefois, pour qu’une telle solution puisse exister il est nécessaire que le gradient de pression extérieur et le profil des vitesses au niveau de la séparation, vérifient des conditions de compatibilité très restrictives, mais il n’est pas impossible de penser que, dans un problème réel, la position du point de séparation et la forme géométrique de la ligne de séparation soient telles que ces conditions se trouvent justement réalisées. C’est là, en fait, le problème essentiel lié au décollement de la couche limite et, à l’heure actuelle, aucun argument décisif n’a pu être avancé pour trancher cette question.

V, 2.1.2. – Solution aval.

La solution “régulière” des équations de couche limite est prolongeable dans un voisinage du point de décollement, à l’aval de celui-ci, mais la solution “singulière” ne l’est pas directement. Cependant STEWARTSON [56] a montré qu’il était possible de construire une solution des équations de couche-limite, à l’aval, qui se raccorde bien avec la solution de Goldstein, si on abandonne la condition d’adhérence à la paroi, pour la remplacer par une condition de glissement, le long d’une ligne de jet. Stewartson interprète cette solution comme étant due au fait que la couche limite quitte la paroi au point de séparation et qu’il ne faut pas chercher une solution valable jusqu’à la paroi.

La solution de Stewartson est de la forme (5) :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi}_2 = 2^{3/2} \xi^3 [F_0(\eta) + \xi F_1(\eta) + \xi^2 F_2(\eta) + \dots] \\ \xi = \bar{x}_2^{1/4}, \quad \eta = 2^{-1/2} \bar{y}_2 \bar{x}_2^{-1/4} \end{array} \right.$$

avec :

$$(6) \quad F_0 = \frac{\eta^3}{6}, \quad F_1 = \beta_1 \eta^2, \quad F_2 = 2\beta_1^2 \eta + 2\alpha_1^2 \left(\eta - \frac{\eta^5}{30} \right) + \beta_2 \eta^2$$

Dans cette description, la ligne de séparation a pour équation :

$$(7) \quad \bar{y}_2 = -2^{3/2} \beta_1 \bar{x}_2^{1/2} - 2^{3/2} \beta_2 \bar{x}_2^{3/4} + \mu_4 \bar{x}_2 + \dots$$

Si donc β_1 ou β_2 sont différents de zéro, la ligne de séparation, à l'échelle couche-limite, quitte la paroi sous un angle droit.

V, 2. 2. — Comportement des solutions des équations de Navier-Stokes.

L'étude locale de la séparation à partir des équations de Navier-Stokes a été faite par plusieurs auteurs en faisant l'hypothèse que la solution de ces équations admet localement un double développement en série de Taylor (cf. par exemple LEGENDRE [42] et OSWATITSCH [50]). Une mention spéciale doit être faite au sujet du travail de DEAN [12] : Partant des mêmes conditions limites que GOLDSTEIN, (gradient de pression donné à la paroi, et profil de vitesse donné au point de séparation), DEAN a pu montrer en effet la possibilité de construire un développement en série de Taylor (donc parfaitement régulier), solution des équations de Navier-Stokes et vérifiant les conditions limites imposées. Ce développement étant écrit dans le système de variables *correspondant à la normalisation de couche-limite*, il apparaît que certains coefficients tendent vers l'infini, lorsque le nombre de Reynolds augmente indéfiniment, sauf dans le cas où sont satisfaites certaines conditions de compatibilité qui s'avèrent être identiques à celles obtenues par Goldstein pour construire une solution régulière à la séparation, à partir des équations de la couche-limite.

Nous nous proposons, dans ce paragraphe, de justifier la régularité du comportement des solutions des équations de Navier-Stokes au voisinage du point de séparation.

Proposition 27.

Lorsque la distance à la paroi $\tilde{y}$ tend vers zéro, les solutions des équations de Navier-Stokes, au voisinage d'un point de séparation, sont nécessairement de la forme :

$$(8) \quad \tilde{\psi} = k\tilde{y}^2 (\tilde{y} - m\tilde{x}) + \tilde{\rho}^3 \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y})$$

où $\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y})$ tend vers zéro lorsque $\tilde{\rho}$ tend vers zéro, ($\tilde{\rho}^2 = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2$).

La démonstration de cette proposition se fait par utilisation des résultats du chapitre III et a été donnée en détail par l'auteur dans la référence [21]. Nous en rappellerons donc seulement les grandes lignes :

a — La solution étant asymptotiquement solution de l'équation de Stokes $\tilde{\Delta} \tilde{\Delta} \tilde{\psi} = 0$, on peut utiliser les résultats du §. III, 3.2.2 correspondant au cas de la plaque plane infinie, ce qui permet d'écrire le comportement de la solution, au voisinage de la paroi, sous la forme :

$$(9) \quad \tilde{\psi} = \tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_2$$

avec

$$(10) \quad \begin{cases} \tilde{\psi}_1 = \text{Re} \{A(z) + \bar{z}C(z)\} \\ \tilde{\psi}_2 = -I \{B(z) + \bar{z}D(z)\} \end{cases} \quad (z = \tilde{y} + i\tilde{x})$$

Les fonctions A', B', C, D ont été obtenues dans le plan de la variable $\xi = z^2$ sous la forme (11) (cf. formules (36) et (37) du §. III, 3.2.2) :

$$(11) \quad \begin{cases} a = 2\xi F'_1 - 2\xi^{1/2} G'_1 - F_1 \\ c = F_1 - \xi^{-1/2} G_1 \\ d = F_2 - \xi^{-1/2} G_2 \\ b = F_2 + 2\xi^{-1/2} G_2 + 2\xi F'_2 - 2\xi^{1/2} G'_2 \end{cases}$$

Pour obtenir ces expressions, dans lesquelles F_1, F_2, G_1, G_2 sont quatre fonctions arbitraires de $\xi = z^2$, holomorphes en tout point de la paroi, on a fait la seule hypothèse que les quatre fonctions a, b, c, d vérifient, au point de séparation, une condition de Holder dont on a déjà signalé en III, 3.2.2 qu'elle était très peu restrictive (classe nommée $\mathcal{H}$ au chapitre III).

b – Lorsque $\tilde{\rho}$ tend vers zéro, on sait, par construction, que F_1, F_2, G_1, G_2 , admettent un développement en série de Taylor de la forme (12) :

$$(12) \quad \begin{cases} F_1 = \sum_{n=0} A_{1n} \frac{z^{2n}}{2}, & G_1 = \sum_{n=0} B_{1n} \frac{z^{2n}}{2} \\ F_2 = \sum_{n=0} A_{2n} \frac{z^{2n}}{2}, & G_2 = \sum_{n=0} B_{2n} \frac{z^{2n}}{2} \end{cases}$$

Par substitution on obtient aussi les expressions de $\tilde{\psi}_1$ et $\tilde{\psi}_2$ sous la forme (13) en coordonnées polaires :

$$(13) \quad \begin{cases} \tilde{\psi}_1 = \sum_n A_{1n} \tilde{\rho}^{2n} \cos \theta \cos (2n-1)\theta + \sum_n B_{1n} \tilde{\rho}^{2n+1} (2n \cos \theta \cos 2n\theta + \sin \theta \sin 2n\theta) \\ \tilde{\psi}_2 = \sum_n A_{2n} \tilde{\rho}^{2n} [2n \cos \theta \sin (2n-1)\theta - \sin 2n\theta] + \sum_n B_{2n} \tilde{\rho}^{2n-1} \cos \theta \sin (2n-2)\theta \end{cases}$$

Ces expressions montrent que la solution est dominée, au voisinage du point de séparation, par un polynôme homogène en $\tilde{x}, \tilde{y}$ dont il reste à déterminer le degré.

c – On fait l'hypothèse, naturelle, qu'il n'existe, au voisinage d'un point de décollement O , qu'une seule ligne $\tilde{\psi} = 0$, autre que la paroi, issue de O . Partant des expressions (13), on montre alors (cf. Annexe) que, quelles que soient les constantes $A_{1n}, B_{1n}, A_{2n}, B_{2n}$, il existe toujours plus d'une ligne $\tilde{\psi} = 0$, réelle, issue de O , dès que le degré du polynôme en $\tilde{x}, \tilde{y}$ dépasse la valeur 3. D'autre part, le polynôme de degré 2 est identique à $\alpha \tilde{y}^2$ donc donne un frottement constant à la paroi, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse que O est un point de séparation. La solution au voisinage de O est donc bien dominée par un polynôme de degré 3 qui s'avère être de la forme $k\tilde{y}^2 (\tilde{y} - m\tilde{x})$, ce qui achève de démontrer la proposition 27.

Au voisinage du point O le profil des vitesses u parallèles à la plaque est parabolique et représenté sur la figure V,1 qui montre clairement la présence d'un courant de retour. Si on désigne par φ l'angle de décollement le sommet de la parabole, lieu des points de tourbillon nul, fait avec la paroi un angle dont la tangente est égale à $(1/3) \operatorname{tg} \varphi$. La ligne de vitesse u nulle est également une droite de pente égale aux $2/3$ de celle de la ligne de séparation. Ces valeurs $1/3$ et $2/3$ des pentes sont confirmées par divers calculs numériques basés sur l'intégration des équations de Navier-Stokes et même par un calcul de couche limite dû à Catherall et Mangler [7] sur lequel nous aurons l'occasion de revenir. Signalons enfin qu'il est facile de retrouver certains des résultats obtenus dans les références [12] [42] et [50], en particulier les formules (14) établies par Oswatitsch,

$$(14) \quad \frac{\partial p}{\partial y} / \frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{\partial \tau_f}{\partial x} / \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{3} \operatorname{tg} \varphi,$$

formules dans lesquelles p désigne la pression et τ_f le frottement à la paroi au voisinage de O .

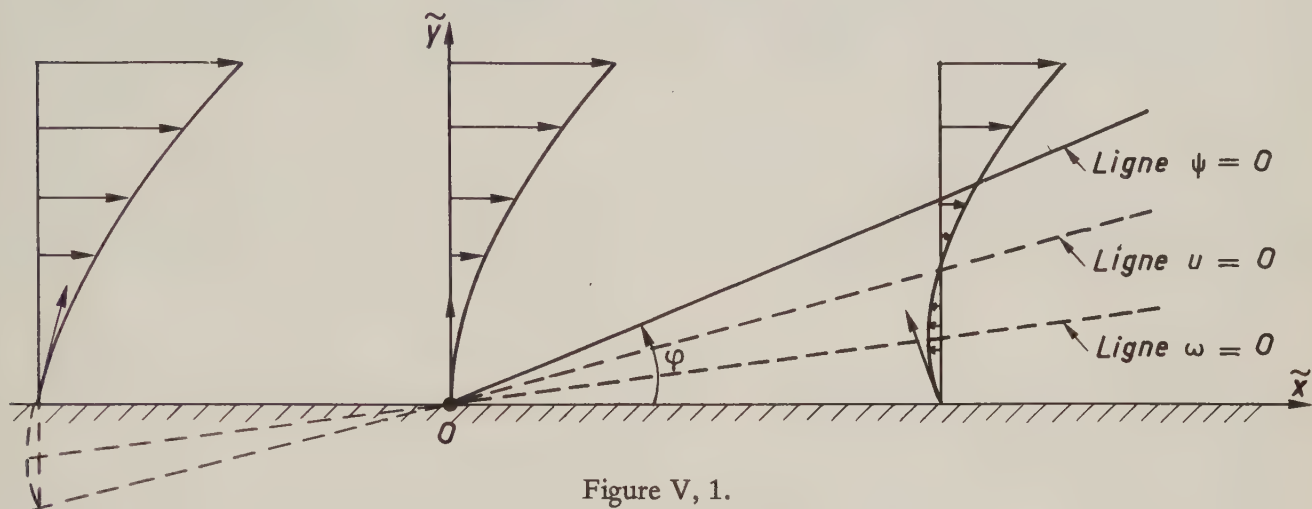


Figure V, 1.

V, 2. 3. — Comportement des solutions des équations d'Euler.

Si on se place à l'échelle de la solution extérieure de fluide parfait, et dans l'hypothèse, que nous ferons désormais, où le gradient de pression extérieur a une valeur finie, différente de zéro, au point de séparation O lorsque $R \rightarrow \infty$, il est clair que la ligne de séparation (Γ) issue de O , part tangentielle à la paroi (cf. figure V,2).

En effet l'expression classique du comportement des solutions d'Euler dans un angle montre que si la ligne de séparation n'était pas dans le prolongement de la paroi amont, le gradient de pression serait soit nul soit infini en O (ce dernier cas est d'ailleurs impossible si la paroi n'a pas de point anguleux).

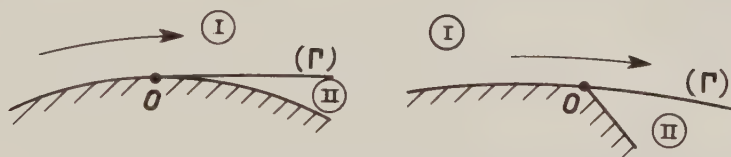


Figure V, 2.

V, 3. — DESCRIPTION DE L'ÉCOULEMENT LIMITE POUR $R \rightarrow \infty$.

Supposons que l'écoulement de fluide parfait soit complètement connu et, en dehors de toute hypothèse sur la région décollée (II sur la figure V,2), considérons seulement ce qui se passe dans la région potentielle I.

Il est clair que la ligne constituée par la paroi à l'amont de O et (Γ) à l'aval est une ligne singulière, de type tangential, pour la solution de fluide parfait et entraîne l'existence d'une couche-limite nécessairement décrite par les équations de Prandtl. La seule singularité éventuelle de cette couche limite est constituée par le point O par suite du changement de nature de la condition limite à la frontière, la vitesse u n'étant plus nulle sur (Γ).

Vu sous cet aspect, le problème s'apparente beaucoup à celui du bord de fuite et, puisqu'il n'y a pas de déviation de l'écoulement extérieur, la singularité en O ne doit pas être de type "normal", mais de type "ponctuel", ce qui se trouve confirmé par la forme (4) de la solution "externe" de Goldstein qui est du même type que pour le bord de fuite. Nous nous proposons donc de rechercher l'ordre de grandeur du domaine Navier-Stokes $\mathcal{D}_1$ dont on peut soupçonner la présence au voisinage de O . Pour cela, nous envisagerons successivement les deux cas "régulier" et "singulier".

V, 3. 1. – Cas de la solution "régulière" de la couche-limite.

Par suite de la régularité de la solution, on peut penser a priori qu'il n'y a pas lieu d'introduire un domaine Navier-Stokes $\mathcal{D}_1$; Nous allons montrer que tel est bien le cas, au moins en ce qui concerne les deux premières approximations :

V, 3. 1. 1. – Dimension du domaine $\mathcal{D}_1$.

La solution de couche limite, au voisinage du point O , s'écrit sous la forme :

$$(15) \quad \bar{\psi}_2 = \alpha(\bar{x}_2) \bar{y}_2^2 + \beta(\bar{x}_2) \bar{y}_2 + \dots$$

et, pour la solution régulière avec *gradient de pression non nul*, on a :

$$(16) \quad \begin{cases} \alpha(\bar{x}_2) \sim \lambda \bar{x}_2 + \dots \\ \beta(\bar{x}_2) \sim a + b \bar{x}_2 + \dots \quad (a \neq 0) \end{cases}$$

Du fait que $\alpha(\bar{x}_2)$ s'annule, et non $\beta(\bar{x}_2)$, une ambiguïté apparaît pour déterminer le terme dominant du développement (15) au voisinage de O :

a – Si le terme dominant est $\bar{x}_2 \bar{y}_2^2$, alors :

$$\begin{cases} \alpha_2 = 1 \\ \beta_2 = 2 \end{cases}$$

et le raccord $\mathcal{D}_1 \leftrightarrow \mathcal{D}_2$, d'après le tableau II, conduit à :

$$q_1 = 1/2$$

Dans cette hypothèse, le domaine Navier-Stokes a donc pour ordre de grandeur $LR^{-1/2}$.

Examinons alors plus en détail le raccord $\mathcal{D}_1 \leftrightarrow \mathcal{D}_2$, et, pour cela, suivant la règle proposée par VAN DYKE [62], écrivons la solution extérieure (15) en variables intérieures $\bar{\psi}_1, \bar{x}_1, \bar{y}_1$. Il vient ainsi :

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{x}_2 R^{1/2} \\ \bar{y}_1 = \bar{y}_2 \\ \bar{\psi}_1 = \bar{\psi}_2 R^{1/2} \end{cases}$$

d'où, après réordonnement par rapport à R :

$$\bar{\psi}_1 \sim R^{1/2} a \bar{y}_1^3 + \lambda \bar{x}_1 \bar{y}_1^2 + \dots$$

La constante a étant différente de zéro par hypothèse*, on aboutit ainsi à une contradiction, puisque le terme $\bar{x}_1 \bar{y}_1^2$ que nous avons supposé dominant, et qui est bien d'ordre unité, est précédé, dans le développement par un terme qui croît indéfiniment lorsque $R \rightarrow \infty$. Le terme dominant n'est donc pas celui que nous avons supposé.

b — Si le terme dominant est $\bar{y}_2^3$, alors :

$$\begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \beta_2 = 3 \end{cases}$$

et on obtient

$$(17) \quad q_1 = 2/3$$

Dans ce cas, les relations entre variables "intérieures" et "extérieures" s'écrivent sous la forme (18), tandis qu'après réordonnement, on est conduit à l'expression (19) de $\bar{\psi}_1$:

$$(18) \quad \begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{x}_2 R^{2/3} \\ \bar{y}_1 = \bar{y}_2 R^{1/6} \\ \bar{\psi}_1 = \bar{\psi}_2 R^{1/2} \end{cases}$$

$$(19) \quad \bar{\psi}_1 \sim a \bar{y}_1^3 + R^{-1/2} \lambda \bar{x}_1 \bar{y}_1^2 + \dots$$

Il n'apparaît donc pas de contradiction, le terme dominant étant celui prévu et les termes suivants étant bien négligeables devant lui. (Remarquons qu'on ne peut assurer la validité du 2^{ème} terme sans considérer l'approximation $R^{-1/2}$ complète).

Proposition 28.

S'il existe un domaine Navier-Stokes au voisinage d'un point de séparation régulier, avec gradient de pression extérieur non nul, ce domaine a pour dimension caractéristiques

$$L_{x_1} = L_{y_1} = LR^{-2/3}$$

V, 3. 1. 2. — *Solution dans le domaine $\mathcal{D}_1$ et recherche de la seconde approximation.*

On est amené, dans le domaine $\mathcal{D}_1$, à rechercher une solution des équations complètes de Navier-Stokes qui vérifie la condition d'adhérence à la paroi et se comporte à l'infini comme $a \bar{y}_1^3$ d'après (19).

* Nous avons fait l'hypothèse que a est différent de zéro afin de nous placer dans le cadre des études de Goldstein et Stewartson qui envisagent seulement le cas d'un gradient de pression fini, non nul, à la séparation ; Il est clair que si $a = 0$ la contradiction n'existe pas et le domaine Navier-Stokes a pour dimension $LR^{-1/2}$. C'est en particulier le cas pour un point d'arrêt, ou pour les exemples qui ont fait l'objet de la proposition 22 au chapitre IV.

Il est clair que la fonction $\bar{\psi}_1 \equiv a\bar{y}_1^3$, est *solution exacte* et vérifie toutes les conditions imposées. On obtient donc le résultat *qu'il n'y a pas lieu d'introduire un domaine Navier-Stokes en première approximation*, puisque la solution dans cette zone est confondue avec le prolongement de la solution de couche-limite.

Il est intéressant, dans ces conditions, de rechercher la deuxième approximation qui, d'après (19), doit être d'ordre $R^{-1/2}$. Pour cela, il faut d'abord noter qu'il est nécessaire de connaître la seconde approximation de couche-limite qui, d'après des résultats classiques, est également d'ordre $R^{-1/2}$ (cf. par exemple [62] et [64]). Le fait que la solution à cet ordre doit elle aussi vérifier la condition d'adhérence à la paroi, entraîne qu'elle admet, au voisinage de O , un comportement du type (15) dans lequel les fonctions $\alpha(\bar{x}_2)$ et $\beta(\bar{x}_2)$ sont remplacées par des expressions de la forme (20) :

$$(20) \quad \begin{cases} \alpha'(\bar{x}_2) \sim \lambda' \bar{x}_2^{\alpha'} + \dots & (\alpha' > 0) \\ \beta'(\bar{x}_2) \sim a' + b' \bar{x}_2^{\beta'} + \dots & (\beta' > 0) \end{cases}$$

La première exprime le fait que le frottement doit être nul en $\bar{x}_2 = 0$, tandis que la seconde représente la perturbation d'ordre $R^{-1/2}$ sur le gradient de pression extérieur dû à l'effet de déplacement de la couche limite, perturbation que l'on suppose finie ou éventuellement nulle en O (si $a' = 0$).

Utilisant ces expressions, on peut écrire, comme précédemment la solution extérieure $\bar{\psi}_2$ jusqu'à l'ordre $R^{-1/2}$ inclus en variables intérieures, ce qui conduit au comportement suivant (21) :

$$(21) \quad \bar{\psi}_1 \sim a\bar{y}_1^3 + R^{-1/2} (\lambda\bar{x}_1\bar{y}_1^2 + a'\bar{y}_1^3) + \lambda'R^{-(1/2)+(1-4\alpha')/6} \bar{x}_1^{\alpha'}\bar{y}_1^2 + \dots$$

La perturbation est donc bien d'ordre $R^{-1/2}$, sous réserve que $(1 - 4\alpha')$ soit négatif, c'est-à-dire $\alpha' > 1/4$ ce que nous admettrons (le cas $\alpha' \leq 1/4$ peut être traité de façon tout à fait analogue au cas singulier, cf. V,3.2).

La formule (21), qui représente le comportement à l'infini de la solution dans $\mathcal{D}_1$, nous conduit à rechercher celle-ci sous la forme (22) :

$$(22) \quad \bar{\psi}_1 = a\bar{y}_1^3 + R^{-1/2}\varphi(\bar{x}_1, \bar{y}_1) + \dots$$

et par substitution dans l'équation de Navier-Stokes, il apparaît, par identification des termes d'ordre $R^{-1/2}$, que φ est solution de l'équation (23) :

$$(23) \quad 3a\bar{y}_1^2 \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} (\Delta\varphi) - 6a \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}_1} = \Delta(\Delta\varphi)$$

Les conditions limites pour φ sont les suivantes :

$$(24) \quad \begin{cases} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{y}_1} = 0 & \text{pour } \bar{y}_1 = 0 \\ \varphi \sim \lambda\bar{x}_1\bar{y}_1^2 + a'\bar{y}_1^3 & \text{à l'infini} \end{cases}$$

L'équation (23) est linéaire, et, par substitution, on s'aperçoit que $\bar{x}_1\bar{y}_1^2$ et $\bar{y}_1^3$ en sont deux solutions particulières exactes, qui, de plus, vérifient les conditions (24).

Quelles que soient les valeurs de λ et a' , la solution du problème (23) – (24) est donc :

$$(25) \quad \varphi \equiv \lambda \bar{x}_1 \bar{y}_1^2 + a' \bar{y}_1^3$$

La solution, à l'ordre $R^{-1/2}$ est ainsi confondue, dans $\mathcal{D}$, avec la solution de couche-limite.

Proposition 29.

Dans le cas de la solution "régulière" de couche-limite, et si on se limite à la première approximation, il n'y a pas de zone Navier-Stokes au voisinage du point de séparation, la solution étant le prolongement de la solution de couche-limite.

Ce résultat demeure valable pour l'approximation d'ordre $R^{-1/2}$, sous réserve que l'exposant α' caractérisant le comportement du frottement à la paroi, au voisinage de O , dans la deuxième approximation de couche limite, soit supérieur à $1/4$.

V, 3. 1. 3. – *Conséquences de la proposition 29.*

Outre le fait que la solution de couche-limite régulière peut être prolongée au delà du point de séparation, la proposition (29) permet de montrer que l'angle de séparation φ , à l'échelle du plan physique est d'ordre $1/\sqrt{R^*}$. En effet la ligne $\bar{\psi}_1 = 0$, en seconde approximation, est définie par :

$$\bar{y}_1 = -\frac{\lambda}{a} R^{-1/2} \bar{x}_1 = \bar{x}_1 \operatorname{tg} \varphi$$

Comme le domaine $\mathcal{D}_1$ a une échelle homothétique de celle du plan physique dans le rapport $R^{-2/3}$, l'angle de séparation, vu à l'échelle du plan physique, reste bien d'ordre $R^{-1/2}$.

On peut remarquer d'autre part qu'en réordonnant l'expression de $\bar{\psi}_1$ par rapport aux puissances successives de $\bar{y}_1$, on obtient :

$$\bar{\psi}_1 = k \bar{y}_1^2 (\bar{y}_1 - m \bar{x}) + O(R^{-1/2})$$

avec

$$\begin{cases} k = a + R^{-1/2} a' \\ m = \frac{\lambda R^{-1/2}}{a + a' R^{-1/2}} \end{cases}$$

On retrouve donc bien la forme attendue (8), pour la solution au voisinage de la paroi, telle qu'elle résulte de la proposition 27, ce qui vient confirmer, à posteriori, la validité des hypothèses qui avaient été faites pour obtenir cette proposition.

V, 3. 2. – *Cas de la solution "singulière" de couche-limite.*

On peut refaire pour la solution singulière un raisonnement tout-à-fait analogue à celui que l'on vient de faire pour la solution régulière. Nous en résumons, ci-dessous, les principales étapes :

* Ce résultat avait déjà été établi par l'auteur dans la référence [21]. Toutefois, la méthode employée était très différente puisqu'on ne raisonnait que sur la forme linéarisée, valable au voisinage de la paroi, ce qui nécessitait l'hypothèse supplémentaire que la solution appartenait à la classe $\mathcal{S}_2$ définie au §. III, 3. De plus, deux erreurs facilement corrigées avaient été commises : La première dans l'évaluation de l'ordre de grandeur de $\mathcal{D}_1$, et la seconde par le fait que l'on n'avait pas tenu compte de l'approximation de couche-limite d'ordre $R^{-1/2}$, qui, finalement, ne change pas le résultat. (Négliger cette approximation revient à faire $a' = 0$).

a — L'ambiguïté qui existait pour déterminer l'ordre de grandeur du domaine $\mathcal{D}_1$ est toujours présente et conduit à $q_1 = 3/5$ si le terme dominant est $\bar{x}_1^{1/2} \bar{y}_1^2$ ou $q_1 = 2/3$ si le terme dominant est y_1^3 . La première valeur conduit à la même contradiction que dans le cas régulier (mauvais réordonnement des termes), alors que $q_1 = 2/3$ est acceptable. On peut d'ailleurs remarquer que cette valeur est compatible, quel que soit la façon dont on s'approche de 0, avec le premier terme de la solution "interne" (2) de Goldstein à l'amont, et avec le premier terme de la solution (5) de Stewartson à l'aval. Du fait que q_1 a même valeur que dans le cas régulier, les relations entre variables "intérieures" et "extérieures" restent les mêmes, (formules (18)), tandis que la solution extérieure amont réécrite en variables intérieures conduit à l'expression (26)

$$(26) \quad \bar{\psi}_1 \sim a\bar{y}_1^3 + R^{-1/6} \lambda \bar{x}_1^{1/2} \bar{y}_1^2 + \dots \quad (\bar{x}_1 > 0)$$

En première approximation, le problème est identique à celui envisagé en V,2 et il n'y a pas lieu d'introduire un domaine Navier-Stokes à cet ordre, la solution étant confondue avec celle de couche-limite.

b — La différence entre les cas "régulier" et "singulier" n'apparaît qu'à la seconde approximation, mais elle est très importante. En effet :

1 — La seconde approximation est maintenant d'ordre $R^{-1/6}$ donc beaucoup plus importante, en ordre de grandeur que dans le cas régulier ($R^{-1/2}$).

2 — Il n'y a pas besoin de connaître la seconde approximation de couche-limite (en $R^{-1/2}$), pour résoudre le problème à l'ordre $R^{-1/6}$.

3 — Si on cherche, comme précédemment, une solution dans $\mathcal{D}_1$ de la forme :

$$\bar{\psi}_1 = a\bar{y}_1^3 + R^{-1/6} \varphi(\bar{x}_1, \bar{y}_1) + \dots$$

la fonction φ est encore solution de l'équation linéaire (23), mais $\bar{x}_1^{1/2} \bar{y}_1^2$ n'en est plus une intégrale particulière exacte : A l'ordre $R^{-1/6}$, la solution dans $\mathcal{D}_1$ n'est donc plus le prolongement de la solution de couche limite qui cesse d'être valable*.

L'ensemble de ces résultats est résumé dans la proposition 30.

Proposition 30.

Dans le cas de la solution "singulière" de couche limite il existe, au voisinage du point de séparation, un domaine Navier-Stokes d'ordre de grandeur $LR^{-2/3}$.

En première approximation, la solution dans cette région est confondue avec le prolongement de la solution de couche-limite, mais, dès la seconde approximation d'ordre $R^{-1/6}$ cette propriété cesse d'être vraie.

On peut toutefois remarquer que, même à cet ordre, on n'est jamais amené à résoudre les équations complètes de Navier-Stokes, mais seulement une forme linéaire simplifiée.

V, 4. — QUELQUES REMARQUES SUR LE PROBLÈME DU DÉCOLLEMENT ET CONCLUSION.

En conclusion, on peut dire que l'étude locale du point de séparation que nous venons de faire permet de

* L'expression (26) du comportement à l'infini de $\bar{\psi}_1$ n'est pas contradictoire avec la forme (8), puisque cette dernière n'est valable qu'au voisinage de l'origine. On peut toutefois en conclure que, pour la solution singulière, la fonction $\tilde{\psi}$ représentant le comportement asymptotique de $\bar{\psi}_1$ au voisinage de la paroi n'appartient plus à la classe $\mathcal{S}_2$ comme dans le cas régulier, mais simplement à la classe $\mathcal{S}_1$, plus large.

répondre, au moins en partie, à la deuxième question que nous nous étions posée au début, puisqu'il apparaît que *l'on n'a jamais à résoudre effectivement les équations complètes de Navier-Stokes*, la solution, en première approximation étant même donnée par la solution de couche-limite.

Par contre, la première question reste entièrement posée et ce n'est pas une étude locale qui peut permettre d'y répondre, ainsi que nous l'avons déjà signalé en V,1 et en V,2.1.1.

Cette étude globale de l'écoulement paraît, à l'heure actuelle, hors de portée, et c'est pourquoi il est intéressant de mentionner un travail récent de J.P. GUIRAUD [30] sur un modèle linéaire où les équations de Navier-Stokes sont remplacées par celles de Poisson et celles de la couche-limite par l'équation de la chaleur ; Plus précisément, Guiraud cherche la solution limite pour $\epsilon \rightarrow 0$ de l'équation (26) dans un domaine carré $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ (fig. V,3), les signes + et - dans (26) étant relatifs respectivement aux domaines Ω^+ et Ω^- séparés par la ligne (Γ) .

$$(26) \quad \epsilon \frac{\partial^2 \varphi_\epsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_\epsilon}{\partial y^2} = \pm \frac{\partial \varphi_\epsilon}{\partial x} + f$$

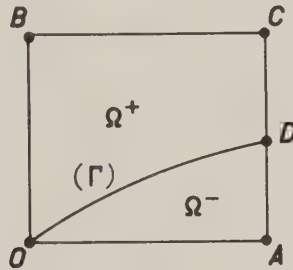


Figure V, 3.

Le problème (26) avec pour conditions limites $\varphi_\epsilon = 0$ sur la frontière du carré est bien posé et admet une solution unique φ_ϵ . Le résultat obtenu peut être formulé de la façon suivante :

Lorsque ϵ tend vers zéro, la solution φ_ϵ dans Ω tend vers la solution φ du problème (27), problème pour lequel on se donne la condition limite seulement sur la portion CBOAD du carré.

$$(27) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \pm \frac{\partial \varphi}{\partial x} + f$$

L'interprétation physique de ce résultat est claire :

- La ligne (Γ) joue le rôle de la ligne de *vitesse* nulle dans la couche limite, les signes + et - étant choisis dans Ω^+ et Ω^- afin de tenir compte du sens de propagation des perturbations dans les domaines où u est respectivement positif et négatif.
- L'équation de départ est elliptique, comme l'équation de Navier-Stokes et lorsque $\epsilon = 0$, on obtient une équation parabolique, comme celle de Prandtl, qui respecte bien le sens de propagation des perturbations.
- Le résultat montre alors que *les équations de la couche limite représentent correctement un phénomène de décollement*, la seule non-uniformité apparaissant à l'infini aval dans Ω^+ (perte de la condition limite sur CD).
- On remarque enfin que le problème global, à partir des équations de couche limite, ne peut être résolu que si, outre les conditions amont, on connaît la condition limite aval dans Ω^- .

Ces diverses remarques vont nous permettre de mieux comprendre les résultats des calculs numériques qui ont été effectués pour tenter de mettre en évidence un phénomène de séparation à partir des équations de Prandtl.

Jusqu'à ces dernières années les calculs faits avaient pour caractéristiques communes les trois points suivants :

- 1 — Ils étaient tous exécutés à partir d'un profil initial donné, et d'un gradient de pression extérieur adverse donné.
- 2 — Ils montraient tous une divergence au voisinage du point de séparation, la singularité correspondante semblant correspondre exactement à celle prévue par la solution singulière de Goldstein.
- 3 — Ils n'étaient pas prolongeables au delà de la séparation.

En fait tous ces résultats sont corrects et s'expliquent fort bien, ainsi qu'on va le voir, *mais ne prouvent absolument pas que la solution réelle du problème global soit effectivement singulière.*

En effet, partant d'un profil donné et d'un gradient de pression extérieur donné on sait que la solution des équations de Prandtl est unique tant que u est positif (cf. par exemple les travaux récents d'Oleinik), ce qui signifie que *le profil de vitesse immédiatement en amont de la séparation est complètement déterminé par les seules conditions amont* et le gradient de pression extérieur donné. Dans ces conditions, il paraît tout à fait improbable que ce profil vérifie justement les conditions de compatibilité très restrictives qui sont nécessaires pour obtenir une solution régulière, et, *à partir de ces données*, il est logique de retrouver la seule solution singulière possible, à savoir celle de Goldstein, qui n'est effectivement pas prolongeable à l'aval de O .

Ces résultats, joints au fait que l'on ne connaissait aucune solution régulière, ni du point de vue numérique, ni du point de vue analytique, constituaient un argument de poids en faveur de la solution singulière, mais un calcul numérique récent de CATHERALL et MANGLER [7] est venu détruire ces arguments en montrant *la possibilité de construire numériquement une solution régulière.* Le principe du calcul est simple : Au lieu de se donner complètement le gradient de pression extérieur, CATHERALL et MANGLER le considèrent comme une inconnue du problème au voisinage du décollement et remplacent cette donnée par celle de l'épaisseur de déplacement $\delta_1(x)$ de la couche limite. On peut en effet montrer (cf. [4]) que si $\delta_1(x)$ est régulier, alors la solution de couche limite l'est nécessairement, et ces deux auteurs ont pu ainsi obtenir une solution régulière, prolongeable au delà de la séparation.

Il est clair, cependant, en utilisant le résultat de Guiraud concernant le modèle linéaire, que le problème doit être mal posé au delà de la séparation, tant que l'on ne s'impose pas de nouvelles conditions limites à l'aval. C'est également le point de vue défendu par Brown et Stewartson dans la référence [4], et c'est ce qui permet d'expliquer les instabilités numériques constatées par Catherall et Mangler à l'aval du point de décollement.

En conclusion, on peut dire que le problème de l'existence d'une singularité pour les solutions des équations de la couche-limite à la séparation reste posé, mais on peut remarquer que tous les résultats obtenus récemment font pencher la balance en faveur de la solution régulière et ont au moins l'avantage de montrer que le problème de *l'influence amont* est capital en la matière et ne peut être négligé.

E

Chapitre VI

ÉCOULEMENT DÉCOLLÉ A GRAND NOMBRE DE REYNOLDS ; SILLAGE

VI, 1. — INTRODUCTION.

Le problème de la recherche des solutions limites des équations de Navier-Stokes lorsque le nombre de Reynolds croît indéfiniment est extrêmement complexe. Les difficultés qui apparaissent sont multiples et nous allons nommer les deux principales :

1 — Tout d'abord on ne sait pas s'il existe effectivement une solution limite des équations de Navier-Stokes stationnaires, lorsque $R \rightarrow \infty$, et même si une telle limite existe, on ne sait pas si elle est unique.

2 — On peut penser qu'en dehors du voisinage de lignes singulières où la couche limite joue sans doute un rôle essentiel, la solution limite sera presque partout solution des équations d'Euler. Or les solutions des équations d'Euler ($\Delta\psi = f(\psi)$) sont très mal connues et, si on prend le problème à partir de ces équations, on sait qu'il n'y a pas unicité des solutions, même en écoulement potentiel. C'est donc certainement la viscosité, aussi faible soit-elle, qui déterminera la solution*. Il est par conséquent impossible de dissocier l'étude du fluide parfait de l'étude des zones visqueuses comme on peut le faire pour la couche limite de plaque plane.

Nous nous proposons, dans ce chapitre, d'examiner seulement un type d'écoulement décollé qui pourrait, a priori, représenter une solution limite des équations de Navier-Stokes : Il s'agit du cas où la configuration limite est constituée d'un écoulement potentiel englobant une zone tourbillonnaire fermée dont les dimensions restent finies lorsque $R \rightarrow \infty$. Un tel schéma a déjà été envisagé par plusieurs auteurs (PRANDTL [51], BATCHLOR [2], CHILDRESS [9] . . .), et fait l'objet de l'étude du §. VI,2. Dans le paragraphe VI,3 nous envisagerons une extension des résultats obtenus en VI,2, au problème de l'écoulement de culot en présence d'une couche limite épaisse par rapport à la hauteur de celui-ci.

VI, 2. — SILLAGE FERMÉ DE DIMENSIONS FINIES LORSQUE $R \rightarrow \infty$.

VI, 2. 1. — Équation valable dans la zone de remous.

L'écoulement étudié est schématisé sur la figure VI,1, la zone de remous fermée étant notée par le symbole $\mathcal{D}$.

L désignant la longueur de l'obstacle, la région $\mathcal{D}$ a pour dimensions caractéristiques $L_x = L_y = L$, donc $\lambda_{\mathcal{D}} = 1$, et, d'après le tableau I, les équations valables dans $\mathcal{D}$ ne peuvent être que celles de Navier-Stokes, de Stokes bidimensionnelles, ou d'Euler bidimensionnelles.

* On peut noter, à ce sujet, combien il est remarquable qu'une condition aussi simple que celle de Joukowski permette de lever cette indétermination et, sans tenir compte des effets de la viscosité, de déterminer une solution potentielle qui, au moins dans certains cas, paraît bien être solution limite des équations de Navier-Stokes. Malheureusement cette condition est insuffisante dès que le corps présente plus d'une pointe (ou pas du tout), et, également lorsqu'il existe des zones décollées ; Il serait donc très intéressant de la généraliser à des écoulements plus complexes, mais l'entreprise paraît bien hasardeuse puisqu'à l'heure actuelle on n'en a toujours pas compris la nature profonde, et on n'est pas capable d'en apporter une justification précise dans le cas le plus simple des profils Joukowski sans décollement.

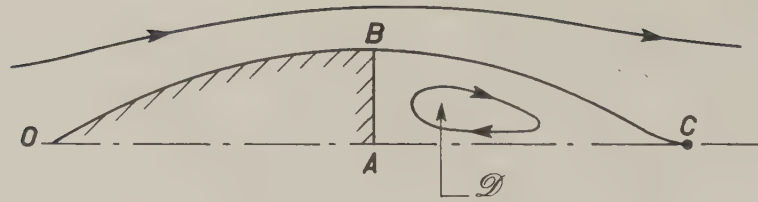


Figure VI,1.

Si $\mathcal{D}$ est décrit par les équations de Navier-Stokes, il est clair qu'un raccord direct $\mathcal{D} \leftrightarrow$ écoulement potentiel n'est pas possible puisque, d'après les résultats du chapitre II, $\mathcal{D}$ ne pourrait que correspondre à une singularité ponctuelle pour la solution potentielle et aurait nécessairement pour dimensions caractéristiques $L_x = L_y = L/R$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse. Il devrait donc exister, le long de la ligne BC , une région intermédiaire, correspondant à une singularité tangentielle, et qui, en vertu de la proposition 8 du chapitre II, ne pourrait être décrite que par l'équation de Stokes unidimensionnelle. Repérant cette région par l'indice 1, l'écoulement potentiel extérieur par l'indice ext , et la région $\mathcal{D}$ par l'indice $\mathcal{D}$, on écrirait les conditions de raccord, d'après le tableau III, sous la forme :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} q_1 = q_{\mathcal{D}} = q_{ext} = 0 \\ p_1 (1 + \beta_{\mathcal{D}}) + r_1 = 0 \\ p_1 (1 + \beta_{ext}) + r_1 - r_{ext} = 0 \end{array} \right.$$

Or la solution générale de l'équation de Stokes unidimensionnelle s'écrit :

$$(2) \quad \bar{\psi}_1 = \alpha_3 (\bar{x}_1) \bar{y}_1^3 + \alpha_2 (\bar{x}_1) \bar{y}_1^2 + \alpha_1 (\bar{x}_1) \bar{y}_1 + \alpha_0 (\bar{x}_1)$$

et cette expression montre que, quel que soit le terme de plus haut degré en $\bar{y}_1$, ce terme est nécessairement le même lorsque $\bar{y}_1 \rightarrow +\infty$ et $\bar{y}_1 \rightarrow -\infty$. Il s'ensuit que le double raccord $\mathcal{D}_1 \leftrightarrow \mathcal{D}$, $\mathcal{D}_1 \leftrightarrow \mathcal{D}_{ext}$ n'est possible que si $\beta_{\mathcal{D}} \equiv \beta_{ext}$, et, d'après les formules (1) il en résulte $r_{ext} \equiv 0$, ce qui est contradictoire avec le fait que le domaine extérieur est de type Euler ($r_{ext} > 0$).

Par conséquent $\mathcal{D}$ ne peut pas être décrit par les équations de Navier-Stokes. Un raisonnement analogue montre que $\mathcal{D}$ ne peut pas non plus être décrit par l'équation de Stokes bidimensionnelle ; $\mathcal{D}$ est donc nécessairement décrit par l'équation d'Euler bidimensionnelle (3)

$$(3) \quad \Delta \bar{\psi}_{\mathcal{D}} = f(\bar{\psi}_{\mathcal{D}})$$

Dans le cadre des équations d'Euler, la fonction $f(\bar{\psi}_{\mathcal{D}})$ est inconnue et il n'existe aucun moyen de la déterminer. Pour obtenir des renseignements sur cette fonction, il est essentiel d'utiliser le fait que $\bar{\psi}_{\mathcal{D}}$ est une solution limite des équations de Navier-Stokes. Le résultat obtenu par PRANDTL [51] et repris depuis par BATCHELOR [2] est remarquablement simple : La fonction $f(\bar{\psi}_{\mathcal{D}})$ est constante dans toute région limitée par une ligne de courant fermée. On voit donc combien l'influence d'une viscosité même négligeable est capitale pour fixer la solution limite.

Dans la suite, nous examinerons seulement le cas où il n'existe, dans la zone de remous, qu'un seul centre tourbillonnaire (cf. figure VI,1), ce qui entraîne que $f(\bar{\psi}_{\mathcal{D}}) = \omega$ est constant dans tout le domaine $\mathcal{D}$. Nous excluons donc les configurations telles que celle de la figure VI,2, où il existe plusieurs tourbillons et, par

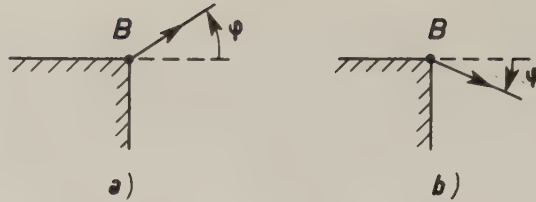


Figure VI,3.

— Si φ est positif (fig. VI,3a), la vitesse est nulle en B donc identique à zéro le long de (Γ) , ce qui est également impossible puisque cette ligne serait, pour l'écoulement potentiel, à la fois une ligne de courant et une ligne équipotentielle.

2 — La ligne de séparation (Γ) doit donc être issue de B sous un angle $\varphi = 0$. La constante intervenant dans (7) est alors finie, et comme q_{ext} ne peut s'annuler en aucun point de (Γ) , cette ligne est nécessairement tangente à la paroi au point de recollement C , ou encore le point C est un point de rebroussement s'il n'y a pas de paroi (figure VI,4).

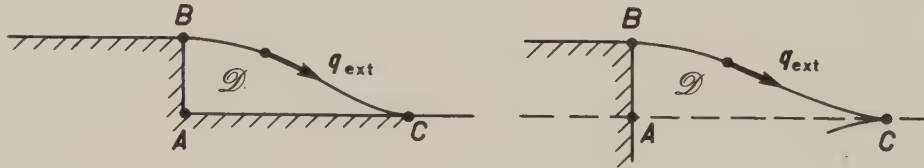


Figure VI,4.

La ligne (Γ) apparaît donc comme une ligne de discontinuité de vitesse tangentielle, ce qui nous conduit à introduire une zone de mélange avec une sous-couche limite périodique, comme le montre la figure VI,5.

Montrons d'abord que la sous-couche limite n'existe pas. En effet, cette couche limite se développant au contact d'une région fluide parfait à *pression constante* (puisque le fluide dans $\mathcal{D}$ est immobile), on peut lui appliquer le "critère de Batchelor" qui exprime la condition de périodicité sous la forme (8) :

$$(8) \quad \oint_{(C)} q_{SCL}^2 ds = \text{cste}.$$

L'intégrale est prise le long de toute ligne de courant fermée (C) de la couche limite, s étant l'abscisse curviligne sur cette courbe et q_{SCL} le module du vecteur vitesse. Comme, à la frontière extérieure de la sous-couche (région $\mathcal{D}$), le fluide est, par hypothèse, immobile, la constante intervenant dans (8) ne peut qu'être nulle, ce qui entraîne dans toute la sous-couche limite :

$$q_{SCL} \equiv 0.$$

La vitesse est donc nulle non seulement dans la région fluide parfait $\mathcal{D}$, mais jusqu'à la paroi, et même sur la ligne de jet BC à l'intérieur de la zone de mélange (on voit, en effet, sur la figure VI,5 que la dernière ligne de courant fermée à laquelle on puisse appliquer le critère de Batchelor (8) est constituée des parois CAB et de la ligne BC).

Le problème pour la couche limite extérieure, non périodique, est alors de trouver une solution q_{CL} telle que q_{CL} tende vers q_{ext} dans la région potentielle et que q_{CL} soit nul ainsi que toutes ses dérivées sur la ligne BC . On sait qu'il n'existe aucune solution à ce problème.

On voit donc que dans tous les cas possibles on aboutit à une contradiction, ce qui démontre la proposition 31 qui peut être formulée encore de la façon suivante :

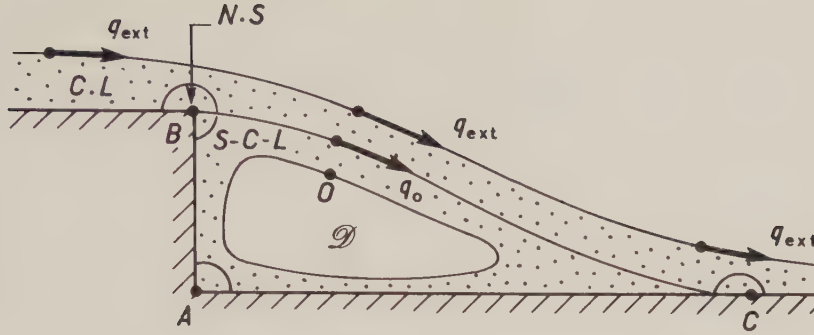


Figure VI,5.

Proposition 32.

|| A la limite des nombres de Reynolds infinis, il ne peut pas exister d'eau morte de dimensions finies ;
 Dans toute zone de dimensions finies, les vitesses sont nécessairement d'ordre unité.

Sous cette forme, on peut considérer le résultat obtenu comme une généralisation d'un théorème démontré dans le cas de la cavitation, à l'aide des seules équations d'Euler, et qui permet d'affirmer qu'il n'existe pas d'eau morte de dimensions finies où la pression soit la pression minimum de l'écoulement. Ici, nous n'avons fait aucune hypothèse sur le niveau de pression dans $\mathcal{D}$.

VI, 2. 3. – *Description de l'écoulement limite.*

Puisque nous savons que, dans l'écoulement limite, les vitesses sont finies dans $\mathcal{D}$, les valeurs des paramètres dans cette région sont

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{\mathcal{D}} = 0 \\ q_{\mathcal{D}} = 0 \\ r_{\mathcal{D}} = 1 \end{array} \right.$$

Conformément au schéma de la figure VI,5, il existe une couche limite CL et une sous-couche-limite périodique SCL dont les caractéristiques sont les mêmes :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{SCL} = p_{CL} = 1/2 \\ q_{SCL} = q_{CL} = 0 \\ r_{SCL} = r_{CL} = 0 \end{array} \right.$$

On peut prévoir de plus l'existence d'un domaine Navier-Stokes autour du point anguleux B . Ce domaine a ses caractéristiques déterminées par le triple raccord avec la couche-limite initiale, la sous-couche périodique (cf. figure VI,6) et la zone de mélange.

Ces raccords sont schématisés par les doubles flèches (a), (b), (c) de la figure VI,6 et s'écrivent respectivement sous les formes suivantes :

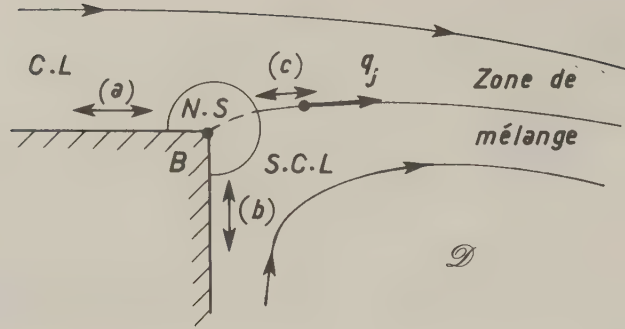


Figure VI,6.

(a) Raccord CL $\leftrightarrow$ NS :

$$(11) \quad p_{NS} = r_{NS} = 0, \quad q_{NS} = \frac{3}{2(\alpha_{CL} + 2)}$$

Dans la dernière expression, α_{CL} désigne l'exposant caractéristique du comportement du frottement à la paroi dans la couche-limite amont, au voisinage de B.

(b) Raccord SCL $\leftrightarrow$ NS :

Avec des notations analogues, on a :

$$p_{NS} = r_{NS} = 0, \quad q_{NS} = \frac{3}{2(\alpha_{SCL} + 2)}$$

(c) Raccord Zone de mélange $\leftrightarrow$ NS :

Si on désigne par $q_j \sim \bar{x}_j^{\alpha_j}$ le comportement de la vitesse le long de la ligne de jet, on a :

$$p_{NS} = r_{NS} = 0, \quad q_{NS} = \frac{1}{\alpha_j + 1}.$$

Le triple raccord n'est possible que si les trois valeurs obtenues pour q_{NS} sont identiques ce qui implique les relations (12) entre les exposants α_{CL} , α_{SCL} et α_j :

$$(12) \quad \begin{cases} \alpha_{CL} = \alpha_{SCL} \\ \alpha_j = \frac{2\alpha_{CL} + 1}{3} \end{cases}$$

On constate donc que la description proposée n'est possible que si les frottements à la paroi, dans la couche limite initiale et dans la sous couche périodique ont le même comportement au voisinage de B. La deuxième des relations (12) définit alors α_j^* .

On peut faire, pour le point de recollement C, un raisonnement analogue à celui qui vient d'être fait, et on peut s'attendre également à la présence d'un domaine Navier-Stokes au voisinage du point A. Ce dernier domaine est défini par la seule couche limite et peut être obtenue par application des résultats du chapitre IV.

* On peut remarquer que si $\alpha_{CL} = \alpha_{SCL} = 0$, alors $\alpha_j = 1/3$. Ce cas correspond au problème du bord de fuite et l'exposant 1/3 est bien celui obtenu par Goldstein.

VI, 3. — GÉNÉRALISATION AU CAS D'UNE COUCHE LIMITE ÉPAISSE.

Les résultats obtenus peuvent être facilement généralisés au cas où l'épaisseur de la couche limite au niveau du culot n'est pas nécessairement négligeable devant la hauteur de celui-ci.

Plus précisément, nous envisageons une zone de remous $\mathcal{D}$ telle que :

$$(13) \quad L_x = L_y = LR^{-\tau}$$

où τ est un paramètre positif ou nul donné (pour $\tau = 0$ on retrouve le cas traité en VI,2 et pour $\tau = 1/2$ la couche limite et le culot ont même épaisseur caractéristique).

VI, 3. 1. — Description de l'écoulement pour $0 \leq \tau < \frac{3}{2(\alpha_{CL} + 2)}$.

On peut penser que pour τ voisin de zéro, le schéma global de l'écoulement proposé en VI,2 pour $\tau = 0$ reste valable. Une étude plus détaillée montre en effet qu'on peut généraliser au cas τ petit* le raisonnement fait dans le cas $\tau = 0$ et conduisant à la conclusion que le domaine $\mathcal{D}$ est nécessairement décrit par les équations d'Euler bidimensionnelles, ce qui entraîne la présence d'une sous-couche limite et d'un domaine de Navier-Stokes autour de B , comme en VI,2.

Par contre, le domaine $\mathcal{D}$ étant évanescant lorsque $R \rightarrow \infty$, on ne peut plus faire le raisonnement qui nous avait conduit à la proposition 32, c'est-à-dire qu'on ne connaît pas, à priori, les ordres de grandeurs des vitesses dans $\mathcal{D}$. Les formules (9) doivent donc être remplacées par les suivantes, où $r_{\mathcal{D}}$ est inconnu :

$$(14) \quad \begin{cases} p_{\mathcal{D}} = 0 \\ q_{\mathcal{D}} = \tau \\ r_{\mathcal{D}} = r_{\mathcal{D}} \end{cases}$$

Le but essentiel que nous poursuivons est justement de déterminer la fonction $r_{\mathcal{D}}(\tau)$, en remarquant que $r_{\mathcal{D}}(0) = 1$ (cas VI,2).

Sans faire l'hypothèse que $\alpha_{SCL} = \alpha_{CL}$, on est conduit à écrire les raccords entre les divers domaines sous les formes suivantes :

1) Raccord $NS \leftrightarrow CL$

$$(15) \quad \begin{cases} p_{NS} = r_{NS} = 0 \\ q_{NS} = \frac{3}{2(\alpha_{CL} + 2)} \end{cases}$$

2) Raccord $\mathcal{D} \leftrightarrow CL$

$$(16) \quad \begin{cases} q_{SCL} = \tau \\ r_{SCL} = 0 \\ p_{SCL} = \frac{r_{\mathcal{D}}}{2} \end{cases}$$

* La valeur limite $\tau = 3/[2(\alpha_{CL} + 2)]$ sera déterminée au §. VI,3.2.

3) Raccord $SCL \leftrightarrow NS$

$$(17) \quad q_{NS} = q_{SCL} + p_{SCL} \frac{3}{2 + \alpha_{SCL}}$$

En tenant compte des valeurs (15) et (16) de q_{NS} , q_{SCL} et p_{SCL} , on obtient finalement la relation cherchée sous la forme (18) :

$$(18) \quad r_{\mathcal{D}}(\tau) = (\alpha_{SCL} + 2) \left(\frac{1}{\alpha_{CL} + 2} - \frac{2\tau}{3} \right)$$

Pour $\tau = 0$, on retrouve bien $r_{\mathcal{D}} = 1$, à condition que soit satisfaite la relation (12) : $\alpha_{CL} = \alpha_{SCL}$.

A priori, les exposants α_{CL} et α_{SCL} sont des fonctions de τ qui ne peuvent être connues qu'après résolution complète du problème de couche limite ; On peut toutefois remarquer que si on fait l'hypothèse que la relation $\alpha_{CL} = \alpha_{SCL}$ demeure vrai quel que soit τ , la relation (18) se simplifie et s'écrit :

$$(19) \quad r_{\mathcal{D}}(\tau) = 1 - \frac{2\tau(\alpha_{CL} + 2)}{3}$$

Ayant ainsi obtenu l'expression $r_{\mathcal{D}}(\tau)$, il est facile de résumer, dans les tableaux ci-après, l'ensemble des résultats concernant les caractéristiques de chacune des régions considérées. Le premier tableau est fait sans aucune hypothèse sur α_{CL} et α_{SCL} , le second correspond au cas $\alpha_{CL} = \alpha_{SCL} = 0$, tandis que le troisième est réservé à l'examen du cas particulier où $\tau = 1/2$, c'est-à-dire quand l'épaisseur de la couche limite au niveau du culot est comparable à la hauteur de celui-ci. Enfin les deux derniers tableaux traitent les cas particuliers où $\tau = 0$ et $\tau = 3/[2(\alpha_{CL} + 2)]$, cette dernière valeur limite résultant des considérations développées au §. VI,3.2.

On constate, en particulier, que dans le cas $\tau = 1/2$, la zone Euler à tourbillon constant existe toujours, de même que la sous couche limite périodique qui, dans l'hypothèse $\alpha_{CL} = \alpha_{SCL} = 0$ a pour épaisseur caractéristique $LR^{-2/3}$.

VI, 3. 2. – Description de l'écoulement pour $\tau \geq \frac{3}{2(\alpha_{CL} + 2)}$.

La description de l'écoulement, telle qu'elle a été proposée, suppose τ voisin de zéro (et positif). On peut s'attendre à ce qu'elle tombe en défaut lorsque τ atteint une certaine valeur limite qu'on se propose de déterminer (Physiquement, ceci correspond au fait que cette description cesse d'être valable lorsque la hauteur du culot est trop petite). Les diverses limitations possibles sont les suivantes :

a) Le domaine $\mathcal{D}$ devient de dimension caractéristique inférieure ou égale à la zone NS ; ceci se produit pour $\tau \geq q_{NS}$ c'est-à-dire :

$$\tau \geq \frac{3}{2(\alpha_{CL} + 2)}$$

b) La sous couche limite ne peut plus exister. Ceci se produit lorsque $\lambda_{SCL} \geq 1$, c'est-à-dire en utilisant l'expression de λ_{SCL} lorsque :

$$\tau \geq \frac{3}{2(\alpha_{CL} + 2)}$$

(en faisant l'hypothèse vraisemblable, que $\alpha_{SCL} + 2 > 0$).

c) L'épaisseur caractéristique de la sous couche limite devient comparable ou inférieure aux dimensions du domaine NS, c'est-à-dire $\tau + (r_{\mathcal{D}}/2) \geq q_{NS}$.

En remplaçant q_{NS} et $r_{\mathcal{D}}$ par leurs valeurs, on obtient la condition :

$$(1 - \alpha_{SCL}) \tau \geq \frac{3}{2(\alpha_{CL} + 2)} (1 - \alpha_{SCL})$$

On voit donc que l'on retrouve encore la même inégalité :

$$\tau \geq \frac{3}{2(\alpha_{CL} + 2)}$$

à condition de supposer $1 - \alpha_{SCL} > 0$. Si cette dernière hypothèse n'était pas satisfaite (de même d'ailleurs que celle $\alpha_{SCL} + 2 > 0$ dans le cas b)), on aboutirait à une contradiction entre les limitations a) et c) d'une part, a) et b) d'autre part.

En conclusion, le schéma proposé n'est valable que si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$$-2 < \alpha_{SCL} < 1$$

$$\tau < \frac{3}{2(\alpha_{CL} + 2)}$$

d) Si la condition $\tau < \frac{3}{2(\alpha_{CL} + 2)}$ n'est plus satisfaite, il est clair que la totalité du sillage proche fermé est incluse dans la zone NS qui décrit alors complètement ce sillage conformément au schéma ci-dessous (fig. VI,7)

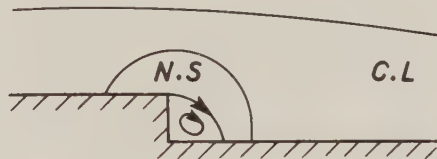


Figure VI,7.

VI, 4. — CONCLUSION.

L'étude qui vient d'être faite dans le cas où τ est quelconque et l'examen des tableaux ci-joints mettent en évidence la cohérence du schéma proposé si on admet que l'égalité $\alpha_{CL} = \alpha_{SCL}$ (éventuellement = 0) est satisfaite. On constate en particulier que si $\tau \rightarrow 3/[2(\alpha_{CL} + 2)]$, les ordres de grandeurs de toutes les quantités dans les domaines $\mathcal{D}$ et SCL tendent bien vers les valeurs correspondantes de la zone NS qui englobe alors tout l'écoulement. Dans l'autre cas limite $\tau \rightarrow 0$, on retrouve également les valeurs attendues par l'étude directe de ce cas au §. VI,2.

On peut donc remarquer, en conclusion de cette étude, que l'existence d'une zone de remous fermée dont les dimensions restent finies lorsque $R \rightarrow \infty$, est directement liée à la validité de la relation $\alpha_{CL} = \alpha_{SCL}$. L'étude présente ne permet pas de conclure plus précisément et une analyse plus fine du problème est nécessaire pour infirmer ou confirmer cette relation, dans chaque cas particulier étudié.

TABLEAU VI,1 : CAS GÉNÉRAL



DOMAINE ↓	CAS GÉNÉRAL : $\tau_{\mathcal{D}} = (\alpha_{SCL} + 2) \left(\frac{1}{\alpha_{CL}} + 2 - \frac{2\tau}{3} \right)$							
	λ	θ	ϵ	L_x/L	L_y/L	u_0/U_∞	v_0/U_∞	$L\Omega_0/U_\infty$
N.S	1	$R^{-\frac{3}{2}(\alpha_{CL}+2)}$	1	$R^{-\frac{3}{2}(\alpha_{CL}+2)}$	$R^{-\frac{3}{2}(\alpha_{CL}+2)}$	$R^{-\frac{2\alpha_{CL}-1}{2(\alpha_{CL}+2)}}$	$R^{-\frac{2\alpha_{CL}-1}{2(\alpha_{CL}+2)}}$	$R^{\frac{1-\alpha_{CL}}{\alpha_{CL}+2}}$
$\mathcal{D}$	1	$R^{-\tau}$	$R^{-\tau_{\mathcal{D}}}$	$R^{-\tau}$	$R^{-\tau}$	$R^{\tau_{\mathcal{D}}+\tau-1}$	$R^{\tau_{\mathcal{D}}+\tau-1}$	$R^{\tau_{\mathcal{D}}+2\tau-1}$
S.C.L	$R^{-\tau_{\mathcal{D}}/2}$	$R^{-\tau}$	1	$R^{-\tau}$	$R^{-\tau-(\tau_{\mathcal{D}}/2)}$	$R^{\tau_{\mathcal{D}}+\tau-1}$	$R^{(\tau_{\mathcal{D}}/2)+\tau-1}$	$R^{(3\tau_{\mathcal{D}}/2)+2\tau-1}$
C.L	$R^{-1/2}$	1	1	1	$R^{-1/2}$	1	$R^{-1/2}$	$R^{1/2}$

TABLEAU VI,2 : Cas $\alpha_{CL} = \alpha_{SCL} = 0$

DOMAINE ↓	Cas $\alpha_{SCL} = \alpha_{CL} = 0$ $r_{\mathcal{D}} = 1 - \frac{4\tau}{3}$				
	L_x/L	L_y/L	u_0/U_∞	v_0/U_∞	$L\Omega_0/U_\infty$
N.S	$R^{-3/4}$	$R^{-3/4}$	$R^{-1/4}$	$R^{-1/4}$	$R^{1/2}$
$\mathcal{D}$	$R^{-\tau}$	$R^{-\tau}$	$R^{-\frac{\tau}{3}}$	$R^{-\frac{\tau}{3}}$	$R^{\frac{2\tau}{3}}$
S.C.L	$R^{-\tau}$	$R^{-\frac{1}{2} - \frac{\tau}{3}}$	$R^{-\frac{\tau}{3}}$	$R^{-\frac{1}{2} + \frac{\tau}{3}}$	$R^{\frac{1}{2}}$
C.L	1	$R^{-\frac{1}{2}}$	1	$R^{-\frac{1}{2}}$	$R^{\frac{1}{2}}$

TABLEAU VI,3 : Cas où $\tau = 1/2$

DOMAINE ↓	Cas particulier $\tau = 1/2$ $\alpha_{CL} = \alpha_{SCL} = 0$				
	L_x/L	L_y/L	u_0/U_∞	v_0/U_∞	$L\Omega_0/U_\infty$
N.S	$R^{\frac{3}{4}}$	$R^{-\frac{3}{4}}$	$R^{-\frac{1}{4}}$	$R^{-\frac{1}{4}}$	$R^{\frac{1}{2}}$
$\mathcal{D}$	$R^{-\frac{1}{2}}$	$R^{-\frac{1}{2}}$	$R^{-\frac{1}{6}}$	$R^{-\frac{1}{6}}$	$R^{\frac{1}{3}}$
S.C.L	$R^{-\frac{1}{2}}$	$R^{-\frac{2}{3}}$	$R^{-\frac{1}{6}}$	$R^{-\frac{1}{3}}$	$R^{\frac{1}{2}}$
C.L	1	$R^{-\frac{1}{2}}$	1	$R^{-\frac{1}{2}}$	$R^{\frac{1}{2}}$

TABLEAU VI,4 : $\tau = 0$

$$(\alpha_{SCL} = \alpha_{CL} = 0)$$

DOMAINE ↓	$\alpha_{CL} = \alpha_{SCL} = 0$ $\tau \rightarrow 0$				
	L_x/L	L_y/L	u_0/U_∞	v_0/U_∞	$L\Omega_0/U_\infty$
N.S	$R^{-\frac{3}{4}}$	$R^{-\frac{3}{4}}$	$R^{-\frac{1}{4}}$	$R^{-\frac{1}{4}}$	$R^{\frac{1}{2}}$
$\mathcal{D}$	1	1	1	1	1
S.C.L	1	$R^{-\frac{1}{2}}$	1	$R^{-\frac{1}{2}}$	$R^{\frac{1}{2}}$
C.L	1	$R^{-\frac{1}{2}}$	1	$R^{-\frac{1}{2}}$	$R^{\frac{1}{2}}$

TABLEAU VI,5 : $\tau = \frac{3}{2(\alpha_{CL} + 2)}$

$$(\tau = 3/4 \quad \text{si} \quad \alpha_{CL} = 0)$$

DOMAINE ↓	$\alpha_{CL} = \alpha_{SCL} = 0$ $\tau \rightarrow 3/4$				
	L_x/L	L_y/L	u_0/U_∞	v_0/U_∞	$L\Omega_0/U_\infty$
N.S	$R^{-\frac{3}{4}}$	$R^{-\frac{3}{4}}$	$R^{-\frac{1}{4}}$	$R^{-\frac{1}{4}}$	$R^{\frac{1}{2}}$
$\mathcal{D}$	$R^{-\frac{3}{4}}$	$R^{-\frac{3}{4}}$	$R^{-\frac{1}{4}}$	$R^{-\frac{1}{4}}$	$R^{\frac{1}{2}}$
S.C.L	$R^{-\frac{3}{4}}$	$R^{-\frac{3}{4}}$	$R^{-\frac{1}{4}}$	$R^{-\frac{1}{4}}$	$R^{\frac{1}{2}}$
C.L	1	$R^{-\frac{1}{2}}$	1	$R^{-\frac{1}{2}}$	$R^{\frac{1}{2}}$

Troisième Partie



APPLICATION AUX ÉCOULEMENTS

A FAIBLE NOMBRE DE REYNOLDS



Chapitre VII

ÉCOULEMENT A FAIBLE NOMBRE DE REYNOLDS AUTOUR D'UN CYLINDRE CIRCULAIRE

VII, 1. — INTRODUCTION.

VII, 1. 1. — *Généralités sur les écoulements à faible nombre de Reynolds.*

Nous avons déjà indiqué dans l'introduction générale, ainsi qu'au chapitre VI, que la recherche des écoulements limites aux très faibles nombres de Reynolds est beaucoup plus simple que le problème correspondant aux très grands nombres de Reynolds.

Cette relative facilité provient des deux raisons suivantes :

a) La structure générale de l'écoulement, c'est-à-dire, finalement, la forme des équations à utiliser dans les divers domaines d'écoulement, est bien connue depuis les travaux de KAPLUN et LAGERSTRÖM [33], [34], [35], et on dispose même de résultats mathématiques précis dus, entre autres à FINN [16], [17], [18] et LERAY [43], [44].

b) Cette forme limite des équations étant connue, on a, de plus, la chance d'aboutir à des problèmes linéaires, ce qui permet de penser à la possibilité d'obtenir la solution sous forme analytique.

On comprendra, dans ces conditions, que le but recherché dans cette troisième partie est tout à fait différent de celui de la deuxième partie. Dans celle-ci, en effet, on était réduit, par la force des choses, à ne rechercher que la forme des équations à résoudre, puis à ne faire que des études locales, alors que, maintenant, nous allons tenter d'obtenir des représentations globales de l'écoulement sous forme de développements asymptotiques bien ordonnés, et sans nous limiter nécessairement à la première approximation.

Dans le cas des écoulements bidimensionnels autour d'un cylindre, la vitesse étant uniforme à l'infini, on sait qu'on se heurte, dès la première approximation, à une difficulté connue sous le nom de "Paradoxe de Stokes" et qui consiste à affirmer qu'il n'existe aucune solution de l'équation biharmonique, telle que

$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ sur le cylindre, et telle qu'à l'infini $\psi \sim y$ (écoulement uniforme). Des démonstrations de ce paradoxe ont été données par KOTTSCHIN, KIBEL et ROSE, ainsi que par CHANG et FINN dans le cas où les dérivées premières et secondes de ψ sur la surface S du cylindre sont régulières.

La technique des développements asymptotiques raccordés, telle qu'elle a été proposée, à peu près simultanément, dans le cas d'un cylindre circulaire, par PROUDMAN et PEARSON [52] et par KAPLUN et LAGERSTRÖM [34] [35], permet de lever ce paradoxe en montrant que l'équation biharmonique (1) n'est pas uniformément valable dans tout l'écoulement et qu'il faut introduire, à l'infini, c'est-à-dire, plus précisément, à des distances d'ordre $1/R$, un autre domaine dans lequel on ne peut plus négliger les termes d'inertie. On obtient donc la solution sous forme d'un double développement. Un développement "intérieur", valable seulement à des distances du corps d'ordre unité et que nous nommerons "développement de Stokes", et un développement extérieur, valable à grandes distances, et dénommé "développement d'Oseen".

VII, 1. 2. – Plan des chapitres VII et VIII.

Le chapitre VII est destiné à l'examen du cas du cylindre circulaire, le problème étant de chercher à mettre en évidence l'influence des termes d'inertie au voisinage du corps. Pour cela, deux méthodes sont présentées:

1) Dans le paragraphe VII,2, on emploie la méthode classique des développements asymptotiques raccordés pour calculer, dans le développement de Stokes, les termes d'ordre R . Ce calcul, suggéré par PROUDMAN et PEARSON dans la référence [52], est formellement correct quoique surprenant à première vue. Le développement de Stokes contient, en effet, avant ce terme d'ordre R , une infinité de termes d'ordre $(\log R)^{-n}$ avec n entier, que l'on peut, en principe, calculer, mais que, pratiquement, on ne connaît pas au delà de $n = 3$. On va donc chercher à évaluer un terme qui n'intervient qu'après avoir épuisé tous ces termes logarithmiques et est donc théoriquement négligeable devant ces derniers. Nous reviendrons plus en détail sur cette question.

2) Dans le paragraphe VII,3, on propose d'éviter la difficulté que nous venons de mentionner par introduction d'un deuxième petit paramètre ϵ , purement artificiel. Nous verrons, en effet que l'existence des termes logarithmiques est directement liée au paradoxe de Stokes, lui-même dû au fait que l'écoulement est bidimensionnel. On propose donc, dans le paragraphe VII,3, d'étudier l'écoulement tridimensionnel autour d'un ellipsoïde de révolution dont on fait croître indéfiniment le grand axe de façon à obtenir, à la limite, l'écoulement autour du cylindre. L'introduction d'un tel paramètre artificiel a déjà été faite par LAGERSTROM dans le problème de l'écoulement d'Oseen autour d'une plaque semi-infinie considérée comme limite d'une parabole. Nous verrons qu'elle conduit à des résultats intéressants mais pose un délicat problème de convergence puisqu'on ne sait pas, a priori, dans quel ordre il faut faire tendre ϵ et R vers zéro (ou en les liant de quelle façon ?

Enfin, le chapitre VIII est consacré à l'étude de l'écoulement autour d'une plaque plane de dimension finie, ce qui nous amènera à discuter à nouveau le paradoxe de Stokes dans le cas où les conditions de régularité des vitesses ou tourbillon, en certains points de la plaque ne sont pas satisfaites (pratiquement aux bords d'attaque et de fuite).

VII, 2. — EMPLOI DE LA MÉTHODE DES DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES RACCORDÉS.

VII, 2. 1. — Résultats des travaux de Proudman et Pearson et de Kaplun et Lagerstrom.

Nous rappelons ici, très brièvement, les résultats présentés dans les références [52], [34] et [35] et résumés dans la référence [62], dont nous utilisons les principales notations :

- a : Rayon du cylindre
- $R = (U_\infty a)/\nu$ Nombre de Reynolds
- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, coordonnée radiale de Stokes (sans dimension)
- ψ : fonction de courant, en variables de Stokes
- $\rho = Rr$: coordonnées radiale d'Oseen, ($\xi = \rho \cos \theta$, $\eta = \rho \sin \theta$)
- $\Psi = R\psi$: fonction de courant, en variables d'Oseen
- θ : angle polaire.

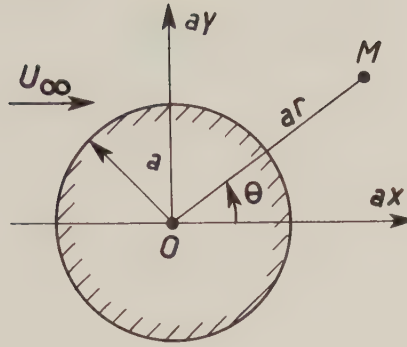


Figure VII,1.

Développement de Stokes.

En variables de Stokes (sans dimension), l'équation à résoudre s'écrit sous la forme (1)

$$(1) \quad \Delta(\Delta\psi) = R \left\{ \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta\psi) - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\Delta\psi) \right\}$$

On en cherche une solution sous forme d'un développement asymptotique de la forme (2), et le calcul montre que, par suite de l'existence du paradoxe de Stokes, les conditions de raccord à l'infini avec le développement d'Oseen donné ci-après, entraînent que la série asymptotique (2) contient une infinité de termes logarithmiques de la forme (3).

$$(2) \quad \psi = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(R) \psi_n(r, \theta)$$

$$(3) \quad f_n(R) = \frac{k_n}{(\text{Log } R)^n} \quad (n \geq 1)$$

D'après la forme de l'équation (1), il en résulte que les fonctions $\psi_n(r, \theta)$ correspondantes sont toutes solutions de l'équation biharmonique, les termes d'inertie ne s'introduisant qu'à l'ordre R ; ceci a une double conséquence :

a) Tous les $\psi_n(r, \theta)$ sont identiques lorsque $f_n(R)$ a la forme (3)

$$(4) \quad \psi_n(r, \theta) \equiv -\sin \theta \left[r \text{Log } r - \frac{r}{2} + \frac{1}{2r} \right]$$

b) Il n'y aura aucune dissymétrie dans l'écoulement au voisinage du cylindre tant qu'on n'aura pas calculé les termes d'ordre R , ce qui paraît impossible à faire puisqu'il faudrait, avant de les considérer, épuiser la série infinie des termes logarithmiques de la forme (3).

Il résulte de cette situation qu'on peut penser regrouper formellement tous les termes logarithmiques du développement (2), en l'écrivant sous la forme (5)

$$(5) \quad \psi = \nu_1(R) \left[-\sin \theta \left(r \text{Log } r - \frac{r}{2} + \frac{1}{2r} \right) \right] + \sum_n f'_n(R) \varphi_n(r, \theta)$$

Cette écriture suppose implicitement que la série (6) définissant $\nu_1(R)$ est convergente et que sa somme est connue :

$$(6) \quad \nu_1(R) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{(\text{Log } R)^n}$$

PROUDMAN et PEARSON ont calculé les deux premiers coefficients k_n , tandis que KAPLUN a obtenu, de plus le troisième, les valeurs sont les suivantes :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} k_1 = 1 \\ k_2 = \frac{1}{2} - \gamma + \text{Log } 4 \\ k_3 + k_2^2 = - \int_0^{\infty} K_0(\xi) K_1(\xi) [\xi^{-1} I_1(2\xi) - 4K_1(\xi) I_1(\xi) + 1] d\xi = -0,87 \dots \end{array} \right.$$

Dans ces expressions, γ désigne la constante d'Euler tandis que K_n et I_n sont les fonctions de Bessel modifiées de première et deuxième espèce, d'ordre n .

Développement d'Oseen.

L'équation (1) et sa solution (2) ne sont pas uniformément valables et doivent être respectivement remplacées, au voisinage de l'infini, par l'équation (8) et le développement (9), en variables d'Oseen.

$$(8) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta \Psi) - \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} (\Delta \Psi) = \Delta \Delta \Psi$$

$$(9) \quad \Psi = \sum_{n=0} F_n(R) \Psi_n(\rho, \theta)$$

Comme, en première approximation on doit retrouver l'écoulement uniforme, on a :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_0(R) = 1 \\ \Psi_0(R) = \rho \sin \theta = \eta \end{array} \right.$$

Par substitution dans (8), on peut définir ainsi une succession de problèmes linéaires pour les Ψ_n , de la forme (11) :

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta \Psi_n) - \Delta (\Delta \Psi_n) = g(\Psi_0, \Psi_1 \dots \Psi_{n-1})$$

tandis que les $F_n(R)$, par les conditions de raccord avec la solution de Stokes, sont d'abord de forme logarithmique :

$$(12) \quad F_n(R) = (\text{Log } R)^{-n}$$

Contrairement à ce qui se passait pour la solution de Stokes, on ne peut plus regrouper entre eux les termes logarithmiques, les fonctions $\Psi_n(r, \theta)$ étant distinctes ;

Si on veut donc, dans ce développement, obtenir les termes d'ordre R , on est amené à supposer que l'on sait calculer non seulement les F_n , mais aussi les $\Psi_n(r, \theta)$, ce qui nous conduit à écrire (9) sous la forme (13) :

$$(13) \quad \begin{aligned} \Psi = & \rho \sin \theta + (\text{Log } R)^{-1} \Psi_1 + \dots + (\text{Log } R)^{-n} \Psi_n + \dots \\ & + R \Phi_0 + R(\text{Log } R)^{-1} \Phi_1 + \dots + R(\text{Log } R)^{-n} \Phi_n + \\ & + O(R^\beta) \quad (\text{avec } \beta > 1) \end{aligned}$$

Le calcul des fonctions Ψ_n et Φ_n est très lourd, et seule l'expression de Ψ_1 solution de l'équation d'Oseen (14) a été donnée, sous forme de la série infinie (15) par ТОМОТИКА et АОИ (cf. [52])

$$(14) \quad \frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta \Psi_1) - \Delta (\Delta \Psi_1) = 0$$

$$(15) \quad \Psi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \left(\frac{\rho}{2}\right) \frac{\rho \sin n\theta}{n}$$

avec :

$$(16) \quad \varphi_n = 2K_1 I_n + K_0 (I_{n+1} + I_{n-1})$$

Dans ces expressions K_n et I_n sont les fonctions de Bessel précédemment définies.

Notons toutefois que le tourbillon $\Delta \Psi_1$ et les vitesses u_1 et v_1 s'écrivent analytiquement sous la forme (17) qui ne fait pas intervenir de série infinie :

$$(17) \quad \begin{cases} \Delta \Psi_1 = -e^{(\rho/2) \cos \theta} K_1\left(\frac{\rho}{2}\right) \sin \theta \\ u_1 = 2 \frac{\partial}{\partial \xi} [\text{Log } \rho + e^{\xi/2} K_0\left(\frac{\rho}{2}\right)] - 2e^{\xi/2} K_0\left(\frac{\rho}{2}\right) \\ v_1 = 2 \frac{\partial}{\partial \eta} [\text{Log } \rho + e^{\xi/2} K_0\left(\frac{\rho}{2}\right)] \end{cases}$$

ces formules seront utiles dans la suite.

VII, 2. 2. – *Calcul des termes d'ordre $R(\text{Log } R)^{-n}$: Influence des termes d'inertie dans le développement de Stokes.*

Nous nous proposons ici de construire les premiers termes φ_n et Φ_n des développements (5) et (13) afin de faire apparaître une dissymétrie dans l'écoulement au voisinage du cylindre . Ce calcul est en effet possible, ainsi que l'ont montré PROUDMAN et PEARSON, sans qu'il soit nécessaire de connaître tous les ψ_n et Ψ_n , un nombre fini d'entre eux intervenant seulement dans le calcul effectif de l'un quelconque des φ_n ou Φ_n .

VII, 2. 2. 1. – *Calcul du développement de Stokes.*

Reprenons la forme (5) du développement de Stokes dans lequel nous considérons $\nu_1(R)$ comme connu. (Nous savons seulement que c'est une fonction de jauge d'ordre $(\text{Log } R)^{-1}$). Par substitution dans l'équation (1), nous constatons que le principe de moindre dégénérescence nous conduit à choisir comme première fonction de jauge $f'_n(R)$ non nulle, l'expression :

$$(18) \quad f'_2(R) = \nu_1^2 R .$$

La fonction φ_2 correspondante est solution de l'équation :

$$(19) \quad \Delta \Delta \varphi_2 = \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \psi_1) - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\Delta \psi_1)$$

c'est-à-dire, lorsqu'on a remplacé ψ_1 par sa valeur (4)

$$\Delta(\Delta \varphi_2) + \frac{2 \sin 2\theta}{r^2} \text{Log } r = 0$$

Il est facile de construire une solution particulière $\varphi_{2,0}$ (20) de cette équation qui vérifie les conditions d'adhérence sur le cylindre :

$$(20) \quad \varphi_{2,0} = \frac{\sin 2\theta}{64} [4r^2 (\text{Log } r)^2 - 2r^2 \text{Log } r + 1 - \frac{1}{r^2}]$$

La solution générale de (19), vérifiant les conditions d'adhérence sur le cylindre, s'écrit alors sous la forme (21), dans laquelle les constantes B_n et C_n ne pourront être déterminées que par les conditions de raccord à l'infini.

$$(21) \quad \begin{aligned} \varphi_2 = & \frac{\sin 2\theta}{64} [4r^2 (\text{Log } r)^2 - 2r^2 \text{Log } r + 1 - \frac{1}{r^2}] \\ & + \sin \theta [B_1 (2r \text{Log } r - r + \frac{1}{r}) + C_1 (r^3 - 2r + \frac{1}{r})] \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \sin n\theta \left\{ B_n [r^{n+2} - (n+1)r^{2-n} + nr^{-n}] + C_n [r^n - nr^{2-n} + (n-1)r^{-n}] \right\} \end{aligned}$$

A cet ordre, le développement de Stokes s'écrit :

$$(22) \quad \psi = \nu_1 \psi_1 + \nu_1^2 R \varphi_2 + \dots$$

VII, 2. 2. 2. — Calcul du développement d'Oseen.

Nous avons déjà donné l'expression de la fonction Ψ_1 (formules (15) à (17)) ; Nous nous proposons ici de calculer Ψ_2 et Φ_0 .

Par substitution dans l'équation d'Oseen (8), il apparaît que Ψ_2 est solution de (23) :

$$(23) \quad \Delta(\Delta \Psi_2) - \frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta \Psi_2) = u_1 \frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta \Psi_1) + \nu_1 \frac{\partial}{\partial \eta} (\Delta \Psi_1)$$

La solution générale de cette équation, qui tend vers zéro à l'infini, peut être obtenue sous forme analytique exacte, ainsi qu'on le montre dans l'annexe VII,1 ; Ψ_2 apparaît ainsi sous la forme (4), dans laquelle les $g_n(u)$ sont des fonctions connues de $u = \rho/2$

$$(24) \quad \Psi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(u) \sin n\theta$$

Le calcul de Φ_0 est beaucoup plus simple, puisque l'équation vérifiée par cette fonction n'est autre que l'équation d'Oseen (25), ainsi qu'on le vérifie aisément par substitution du développement (13) dans l'équation (8).

$$(25) \quad \frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta \Phi_0) - \Delta (\Delta \Phi_0) = 0$$

La solution, nulle à l'infini, peut donc s'écrire sous une forme analogue à celle de Ψ_1 (formule (15)).

VII, 2. 2. 3. — Raccord des deux développements.

Pour écrire le raccord des développements (13) et (22), nous appliquons la méthode proposée par Van DYKE [63] ; pour cela, nous commençons par exprimer le développement de Stokes en variables d'Oseen, et nous notons par $\Psi'(\rho, \theta)$ l'expression obtenue. D'après (22), on a :

$$(26) \quad \Psi' = R\psi = R\nu_1 \psi_1 + \nu_1^2 R^2 \varphi_2 + \dots$$

avec

$$(27) \quad \begin{cases} \nu_1 = (\text{Log } R)^{-1} + k_2 (\text{Log } R)^{-2} + k_3 (\text{Log } R)^{-3} + \dots \\ \psi_1 = -\sin \theta \left[r \text{Log } r - \frac{r}{2} + \frac{1}{2r} \right] \end{cases}$$

tandis que φ_2 est donné par la formule (23). Après avoir remplacé r par ρ/R , on réordonne Ψ' par rapport au petit paramètre R , et on comparera ensuite le résultat obtenu avec le comportement pour $\rho \rightarrow 0$, de la solution d'Oseen.

On peut tout de suite remarquer que le réordonnement de Ψ' ne peut conduire qu'à des termes d'ordre unité ou très petits devant 1, puisque le développement d'Oseen commence par des termes d'ordre 1. On en conclut aussitôt, d'après l'expression (23) de φ_2 , que les constantes C_1, B_2 et C_n, B_n pour $n > 2$ sont nécessairement nulles, puisqu'après réordonnement en R , elles entraîneraient la présence, dans le développement d'Oseen de termes non bornés lorsque $R \rightarrow 0$.

On a donc :

$$(28) \quad \begin{aligned} \varphi_2(r, \theta) = & \frac{\sin 2\theta}{64} [4r^2 (\text{Log } r)^2 - 2r^2 \text{Log } r + 1 - \frac{1}{r^2}] \\ & + B_1 \sin \theta (2r \text{Log } r - r + \frac{1}{r^2}) + C_2 \sin 2\theta (r^2 - 2 + \frac{1}{r^2}) \end{aligned}$$

Cette remarque étant faite, on peut dresser le tableau récapitulatif ci-dessous qui permet de regrouper entre eux les termes de même ordre de Ψ' .

De la même façon, il faut rechercher les divers termes d'ordre 1, $(\text{Log } R)^{-1} \dots$ etc... dans le développement d'Oseen en posant $\rho = Rr$ et en faisant tendre R vers zéro, r étant fixé, puis réécrire ces termes en variables d'Oseen.

Réordonnement du développement de Stokes Ψ' .		
Ordre	Termes provenant de ψ_1	Termes provenant de φ_2
1	$\rho \sin \theta$	$\frac{\rho^2}{16} \sin 2\theta$
$(\text{Log } R)^{-1}$	$\sin \theta \left(\frac{\rho}{2} - \rho \text{Log } \rho \right) + k_2 \rho \sin \theta$	$\left(\frac{\rho^2}{32} - \frac{\rho^2 \text{Log } \rho}{8} \right) \sin 2\theta + \frac{k_2 \rho^2}{8} \sin 2\theta$
$(\text{Log } R)^{-2}$	$k_2 \sin \theta \left(\frac{\rho}{2} - \rho \text{Log } \rho \right) + k_3 \rho \sin \theta$	$\frac{\rho^2 (\text{Log } \rho)^2}{16} \sin 2\theta - \frac{\rho^2 \text{Log } \rho}{32} \sin 2\theta$ $+ C_2 \rho^2 \sin 2\theta + k_2 \left(\frac{\rho^2}{16} - \frac{\rho^2 \text{Log } \rho}{4} \right) \sin 2\theta$ $+ (k_2^2 + 2k_3) \frac{\rho^2 \sin 2\theta}{16}$

Pratiquement, il suffit de chercher le développement, lorsque $\rho \rightarrow 0$ des fonctions $\Psi_1, \Psi_2, \Phi_0 \dots$, ce qui se trouve fait en annexe VII,2. On peut alors dresser le tableau ci-dessous, valable, pour le développement d'Oseen, Ψ , dans la zone de raccord.

Développement d'Oseen			
Ordre	Termes provenant de Ψ_1	Termes provenant de Ψ_2	Termes provenant de $(\rho \sin \rho)$ et Φ_0
1			$\rho \sin \theta$
$(\text{Log } R)^{-1}$	$-\rho \text{Log } \rho \sin \theta$ $+ \rho \sin \theta (\text{Log } 4 - \gamma + 1)$ $- \frac{\rho^2}{8} \text{Log } \rho \sin 2\theta$ $+ \frac{\rho^2}{16} \sin 2\theta (2 \text{Log } 4 - 2\gamma + 1)$		
$(\text{Log } R)^{-2}$		$- (\text{Log } 4 - \gamma + \frac{1}{2}) \rho \text{Log } \rho \sin \theta$ $+ B \rho \sin \theta$ $+ \frac{1}{16} \rho^2 (\text{Log } \rho)^2 \sin 2\theta$ $- \frac{1}{32} (8 \text{Log } 4 - 8\gamma + 5) \rho^2 \text{Log } \rho \sin 2\theta$ $+ E \rho^2 \sin 2\theta$	
R			$\alpha [-\rho \text{Log } \rho \sin \theta$ $+ \rho \sin \theta (\text{Log } 4 - \gamma + 1) + \dots]$

La comparaison des deux tableaux montre que le raccord des deux solutions n'est pas possible dès l'ordre 1.

En effet :

a) A l'ordre 1, le terme $\rho \sin \theta$ provenant de ψ_1 se raccorde bien au terme $\rho \sin \theta$ du développement d'Oseen (ce qui permet de retrouver $k_1 = 1$), mais le terme $(\rho^2/16) \sin 2\theta$ provenant de φ_2 ne se raccorde avec aucun terme du développement d'Oseen.

b) A l'ordre $(\text{Log } R)^{-1}$, on peut encore raccorder les termes provenant de ψ_1 et de la forme $\rho \sin \theta$ ou $\rho \text{Log } \rho \sin \theta$ avec ceux provenant de Ψ_1 ce qui conduit au résultat classique :

$$(29) \quad \boxed{k_2 = \text{Log } 4 - \gamma + \frac{1}{2}}$$

Mais, toujours à cet ordre, on ne peut pas raccorder les termes de la forme $\rho^2 \sin 2\theta$, alors que ceux en $\rho^2 \text{Log } \rho \sin 2\theta$ se raccordent automatiquement. En effet, les coefficients des termes en $\rho^2 \sin 2\theta$ à l'ordre $(\text{Log } R)^{-1}$ sont respectivement :

– Dans le développement de Stokes :

$$\frac{1}{32} + \frac{k_2}{8} = \frac{1}{32} (4 \text{Log } 4 - 4\gamma + 5) \quad (\text{provenant de } \varphi_2)$$

– Dans le développement d'Oseen :

$$\frac{1}{16} (2 \text{Log } 4 - 2\gamma + 1) \quad (\text{provenant de } \Psi_1)$$

Cette double impossibilité dans le raccord des deux développements nous amène à modifier la forme du développement de Stokes, puisqu'on ne peut pas modifier, à cet ordre, celle du développement d'Oseen.

Cette modification est très simple puisqu'elle consiste simplement à introduire dans (22) deux termes respectivement d'ordre R et $R(\text{Log } R)^{-1}$, ce qui conduit à :

$$(30) \quad \psi = \nu_1 \psi_1 + R\psi_0^{(2)} + R(\text{Log } R)^{-1} \psi_1^{(2)} + \nu_1^2 R\psi_2 + \dots$$

En portant ce développement dans l'équation (1), on vérifie que $\psi_0^{(2)}$ et $\psi_1^{(2)}$ sont solutions de l'équation biharmonique, donc s'écrivent, sous forme générale :

$$\begin{aligned} \psi_n^{(2)} = & \sin \theta \left[B_n^1 \left(2r \text{Log } r - r + \frac{1}{r} \right) + C_n^1 (r^3 - 2r + \frac{1}{r}) \right] \\ & + \sum_{j=2}^{\infty} \sin j\theta \left[B_n^j (r^{j+2} - (j+1)r^{2-j} + jr^{-j}) + C_n^j (r^j - jr^{2-j} + (j-1)r^{-j}) \right] \end{aligned}$$

Lorsqu'on réécrit cette solution en variable d'Oseen, on constate immédiatement que le raccord ne sera possible que si tous les B_n^j , C_n^j sont nuls, excepté peut-être B_n^1 et C_n^2 , les autres coefficients B_n^j et C_n^j conduisant à la présence, dans le développement d'Oseen de termes d'ordre $R^{-\beta}$ avec $\beta > 0$.

On peut dans ces conditions, dresser le nouveau tableau de Ψ' (en variables d'Oseen).

Nouveau réordonnement de Ψ' .				
Ordre	Termes provenant de ψ_1	Termes provenant de $\psi_0^{(2)}$	Termes provenant de $\psi_1^{(2)}$	Termes provenant de $\varphi_2^{(2)}$
1	$\rho \sin \theta$	$C_0^2 \rho^2 \sin 2\theta$		$\frac{\rho^2}{16} \sin 2\theta$
$(\text{Log } R)^{-1}$	$\sin \theta \left(\frac{\rho}{2} - \rho \text{Log } \rho \right) + k_2 \rho \sin \theta$		$C_1^2 \rho^2 \sin 2\theta$	$\left(\frac{\rho^2}{32} - \frac{\rho^2 \text{Log } \rho}{8} \right) \sin 2\theta + \frac{k_2 \rho^2}{8} \sin 2\theta$
$(\text{Log } R)^{-2}$	$k_2 \sin \theta \left(\frac{\rho}{2} - \rho \text{Log } \rho \right) + k_3 \rho \sin \theta$			$\left(\frac{\rho^2 \text{Log}^2 \rho}{16} - \frac{\rho^2 \text{Log } \rho}{32} \right) \sin 2\theta + C_2 \rho^2 \sin 2\theta + k_2 \left(\frac{\rho^2}{16} - \frac{\rho^2 \text{Log } \rho}{4} \right) \sin 2\theta + (k_2^2 + 2k_3) \frac{\rho^2 \sin 2\theta}{16}$
$R \text{Log } R$		$-2B_0^1 \rho \sin \theta$		
R		$B_0^1 \sin \theta (2\rho \text{Log } \rho - \rho)$	$-2B_1^1 \rho \sin \theta$	
$R (\text{Log } R)^{-1}$			$B_1^1 \sin \theta (2\rho \text{Log } \rho - \rho)$	$-2B_1 \rho \sin \theta$

La comparaison de ce dernier tableau avec celui correspondant au développement d'Oseen montre que le raccord est maintenant possible et conduit aux résultats suivants :

Ordre 1 :

$$C_0^2 = -\frac{1}{16}$$

Ordre $(\text{Log } R)^{-1}$:

$$k_2 = \text{Log } 4 - \gamma + \frac{1}{2}$$

$$C_1^2 = -\frac{1}{32}$$

Ordre $(\text{Log } R)^{-2}$:

a) Termes en $(\rho \text{Log } \rho) \sin \theta$: $k_2 = \text{Log } 4 - \gamma + \frac{1}{2}$, automatiquement satisfait.

b) Termes en $\rho \sin \theta$: $k_3 = B$

Comme B est connu, ceci détermine k_3 , c'est-à-dire la constante calculée par Kaplun.

c) Termes en $\rho^2 (\text{Log } \rho)^2 \sin 2\theta$: $\frac{1}{16} = \frac{1}{16}$, automatiquement satisfait.

d) Termes en $\rho_2 (\text{Log } \rho) \sin 2\theta$:

$$-\frac{1}{32} - \frac{k_2}{4} = -\frac{1}{32} \quad (8 \text{Log } 4 - 8\gamma + 5)$$

automatiquement satisfait, en tenant compte de la valeur de k_2 .

e) Termes en $\rho^2 \sin 2\theta$:

$$C_2 + \frac{k_2}{16} + \frac{1}{16} (k_2^2 + 2k_3) = E$$

E et k_3 étant connus, ceci détermine C_2 sous la forme

$$C_2 = E - \frac{1}{16} (k_2 + k_2^2 + 2k_3)$$

Ordre $R \text{ Log } R$:

$$B'_0 = 0$$

Ordre R : L'identification n'est possible que si on a, simultanément $B'_1 = \alpha = 0$.

Cette dernière relation montre que Φ_0 , étant proportionnel à α , est nécessairement identique à zéro. On peut alors pousser l'identification jusqu'aux termes en $R (\text{Log } R)^{-1}$: En effet, la fonction Φ_1 dans le développement d'Oseen, à cet ordre, est à nouveau solution de l'équation d'Oseen sans second membre et son comportement au voisinage de $\rho = 0$ est encore de la forme :

$$\Phi_1 \sim \beta [-\rho \text{Log } \rho \sin \theta + \rho \sin \theta (\text{Log } 4 - \gamma + 1) + \dots]$$

Ordre $R(\text{Log } R)^{-1}$: On se retrouve dans la même situation que pour l'ordre R et le raccord n'est possible que si :

$$B_1 = \beta = 0$$

Si on récapitule les résultats obtenus, on voit que toutes les constantes qui interviennent dans la solution de Stokes sont maintenant déterminées, et on peut écrire celle-ci sous la forme (31) :

$$(31) \quad \psi = \nu_1 \psi_1 + R \psi_0^{(2)} + R (\text{Log } R)^{-1} \psi_1^{(2)} + \nu_1^2 R \varphi_2 + \dots$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_1 = -\sin \theta \left(r \text{Log } r - \frac{r}{2} + \frac{1}{2r} \right) \\ \psi_0^{(2)} = -\frac{1}{16} \sin 2\theta \left(r^2 - 2 + \frac{1}{r^2} \right) \\ \psi_1^{(2)} = -\frac{1}{32} \sin 2\theta \left(r^2 - 2 + \frac{1}{r^2} \right) \\ \varphi_2 = \frac{\sin 2\theta}{64} \left[4r^2 \text{Log}^2 r - 2r^2 \text{Log } r + 1 - \frac{1}{r^2} \right] \\ \quad + C_2 \sin 2\theta \left(r^2 - 2 + \frac{1}{r^2} \right) \end{array} \right.$$

On en déduit l'expression du tourbillon sous la forme :

$$\omega = -\frac{1}{2} \Delta \psi = \nu_1 \frac{\sin \theta}{r} + R \frac{\sin 2\theta}{4r^2} + R (\text{Log } R)^{-1} \frac{\sin 2\theta}{8r^2} - \nu_1^2 R \frac{4C_2 \sin 2\theta}{r^2}$$

ou, en regroupant les termes :

$$\omega = \frac{\sin \theta}{r} (\nu_1 + \dots) + \frac{\sin 2\theta}{r^2} \left[\frac{R}{4} + \frac{R (\text{Log } R)^{-1}}{8} - 4C_2 \nu_1^2 R + \dots \right] + \dots$$

VII, 2. 3. — Conclusion.

En conclusion, on peut tout d'abord noter que le calcul de l'écoulement par la méthode des développements asymptotiques raccordés, tel que l'avaient suggéré Proudman et Pearson est effectivement possible. Nous avons pu obtenir trois nouveaux termes du développement de Stokes, sans qu'aucune contradiction apparaisse dans les conditions de raccord, ce qui vient justifier, à postériori, la validité de la méthode ; on peut toutefois noter les points suivants :

- 1) Le calcul est extrêmement lourd, et même s'il reste possible, le calcul numérique des constantes qui s'introduisent (par exemple C_2) n'a pas été fait et demande lui-même un travail important.
- 2) Le résultat obtenu conduit bien à une dissymétrie dans l'écoulement au voisinage du cylindre, puisqu'on a pu calculer des termes faisant intervenir $\sin 2\theta$.
- 3) Il serait intéressant, dans ces conditions, de tenter d'obtenir la valeur du nombre de Reynolds pour laquelle le décollement apparaît. Formellement, il suffit d'écrire $(\partial \omega / \partial \theta) (\theta = 0, r = 1) = 0$, ce qui conduit à :

$$\nu_1 + 2 \left[\frac{R}{4} + \frac{R (\text{Log } R)^{-1}}{8} - 4C_2 \nu_1^2 R \right] = 0$$

On peut même obtenir la position du point de décollement sur le cylindre, en fonction de R par la formule

$$\cos \theta = \frac{\nu_1}{\frac{R}{2} + \frac{R (\text{Log } R)^{-1}}{4} + 8C_2 \nu_1^2 R}$$

Malheureusement ces deux formules sont pratiquement inutilisables par suite de la singularité de la fonction $(\text{Log } R)^{-1}$ au voisinage de $R = 1$, singularité qui exclut la possibilité de prolonger la validité du développement jusqu'à des nombres de Reynolds de l'ordre de l'unité.

D'autre part, la fonction $\nu_1(R)$ est trop imprécisément connue, et ce sont ces diverses raisons qui nous ont amené à envisager le même problème sous un autre aspect, à partir d'un ellipsoïde très allongé.

VII, 3. EMPLOI D'UN PARAMÈTRE ARTIFICIEL : ÉCOULEMENT AUTOUR D'UN ELLIPSOÏDE.

VII, 3. 1. — Pose du problème.

Nous venons de voir au §. VII,2, les difficultés introduites dans la résolution du problème de l'écoulement autour d'un cylindre, par le fait que le terme dominant du développement de Stokes est une fonction $\nu_1(R)$ dont seuls les trois premiers termes du développement, lorsque $R \rightarrow 0$, sont connus.

La présence de cette fonction $\nu_1(R)$ mal connue est, on l'a vu, liée directement à l'existence du paradoxe de Stokes. Or on sait aussi que ce paradoxe n'existe pas pour les écoulements tridimensionnels, ou, plus exactement, que le raccord direct avec l'écoulement à l'infini est possible en première approximation et ne devient impossible qu'en deuxième approximation (termes d'ordre R). Ce résultat est bien connu pour la sphère et constitue le paradoxe de WHITEHEAD (cf. [62]).

On peut donc penser éviter la difficulté introduite par le paradoxe de Stokes, au moins en ce qui concerne la première approximation, en considérant que l'écoulement autour du cylindre circulaire peut être obtenu comme la limite d'un écoulement tridimensionnel.

Pour des raisons de simplicité, nous avons choisi l'écoulement tridimensionnel autour d'un ellipsoïde de révolution très allongé, dont l'axe est placé perpendiculairement à l'écoulement à l'infini (cf. figure VII.2).

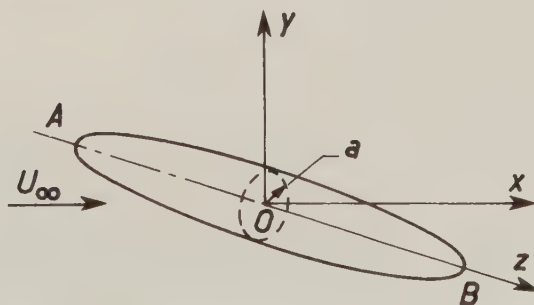


Figure VII,2.

On peut, à priori envisager deux procédés pour obtenir, à la limite, l'écoulement autour d'un cylindre :

a) Ou bien on laisse fixe le rayon a de la section médiane de l'ellipsoïde par le plan xOy (cf. fig. VII.2). et on fait tendre les points A et B vers l'infini en posant $c = OA = OB = a/\epsilon$ avec $\epsilon \rightarrow 0$.

b) ou bien on laisse fixes les points A et B ($c = 1$) et on fait tendre a vers zéro en posant $a = \epsilon$. Dans ce cas, il est nécessaire, pour retrouver l'écoulement limite de Stokes autour du cylindre, de se placer, dans le plan médian $z = 0$, à des distances de l'origine x et y de l'ordre de ϵ .

Nous avons étudié les deux aspects a) et b) ci-dessus. Les raisonnements et les résultats étant tout à fait similaires, nous nous limiterons, ici, à l'exposé du cas b).

VII, 3. 2. — Première approximation de l'écoulement.

VII, 3. 2. 1. — Solution générale (ϵ quelconque).

Le calcul de l'écoulement de Stokes autour d'un ellipsoïde est dû à OBERBECK et est exposé dans les références [3] et [41]. Les principales étapes du raisonnement et du calcul sont données dans l'annexe VII,3 et nous ne donnons ici que le résultat obtenu.

Nous introduisons les coordonnées semi-polaires r, θ, z tels que :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

et nous définissons l'ellipsoïde par son équation :

$$\frac{r^2}{\epsilon^2} + z^2 = 1$$

Les composantes u_r, u_θ, u_z du vecteur vitesse en un point quelconque du champ s'écrivent sous la forme (32) :

$$(32) \quad \begin{cases} u_r = A \cos \theta \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{\epsilon^2} (r \frac{\partial \psi}{\partial r} - \psi) \right] + \cos \theta \\ u_\theta = A \sin \theta \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\psi}{\epsilon^2} \right] - \sin \theta \\ u_z = A \left[\cos \theta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} + \frac{r \cos \theta}{\epsilon} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] \\ R(p - p_0) = \frac{2A}{\epsilon^2} \cos \theta \frac{\partial \Psi}{\partial r} = p^{(0)}. \end{cases}$$

Dans ces expressions, A désigne une constante dont la valeur est donnée par (33), tandis que Φ et ψ sont des fonctions de r et z , par l'intermédiaire de la fonction $\lambda(r, z)$ solution de l'équation (34), les fonctions $\Phi(r, z)$ et $\psi(\lambda)$ étant définies par (35) et (36).

$$(33) \quad \frac{1}{A} = \frac{2\pi}{1 - \epsilon^2} \left[1 + \frac{2 - 3\epsilon^2}{2\sqrt{1 - \epsilon^2}} \text{Log} \left| \frac{\sqrt{1 - \epsilon^2} + 1}{\sqrt{1 - \epsilon^2} - 1} \right| \right]$$

$$(34) \quad \frac{r^2}{\epsilon^2 + \lambda} + \frac{z^2}{1 + \lambda} = 1$$

$$(35) \quad \Phi(r, z) = \frac{\pi \epsilon^2}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \left[1 + \frac{r^2 - 2z^2}{2(1 - \epsilon^2)} \right] \text{Log} \left| \frac{\sqrt{1 - \epsilon^2} + \sqrt{1 + \lambda}}{\sqrt{1 - \epsilon^2} - \sqrt{1 + \lambda}} \right| - \frac{\pi \epsilon^2 \sqrt{1 + \lambda}}{1 - \epsilon^2} \left[\frac{r^2}{\lambda + \epsilon^2} - \frac{2z^2}{\lambda + 1} \right]$$

$$(36) \quad \psi(\lambda) = \frac{2\pi \epsilon^2}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \text{Log} \left| \frac{\sqrt{1 - \epsilon^2} + \sqrt{1 + \lambda}}{\sqrt{1 - \epsilon^2} - \sqrt{1 + \lambda}} \right|$$

La solution donnée par l'ensemble des formules (32) à (36) est une solution *exacte*, qui ne tient pas compte du fait que ϵ est petit. Elle vérifie les conditions d'adhérence sur l'ellipsoïde et redonne bien, à l'infini, l'écoulement uniforme de vitesse $U_\infty = 1$ parallèle à Ox .

VII, 3. 2. 2. — Développement de Stokes lorsque $\epsilon \rightarrow 0$.

Reprenons la solution exacte donnée par les formules (32) à (36) et posons :

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{x} = \frac{x}{\epsilon} \\ \tilde{y} = \frac{y}{\epsilon} \end{array} \right\} \Rightarrow \tilde{r} = \frac{r}{\epsilon}$$

Un calcul fastidieux, mais sans difficulté, permet d'obtenir le développement asymptotique de u_r, u_θ, u_z , dans le plan $z = 0$, lorsque le petit paramètre ϵ tend vers zéro, $\tilde{x}, \tilde{y}$ et $\tilde{r}$ étant fixés ; on est ainsi conduit aux expressions (38) :

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi(\tilde{r}, z = 0) \sim -2\pi\epsilon^2 [2 \text{Log } \epsilon - \text{Log } 4 + 2 \text{Log } \tilde{r}] + O(\epsilon^2) \\ \Phi(\tilde{r}, z = 0) \sim \pi\epsilon^2 [-2 \text{Log } \epsilon + \text{Log } 4 - 1 - 2 \text{Log } \tilde{r}] + O(\epsilon^2) \\ u_r \sim 4\pi A \cos \theta \left[\frac{1}{2r^2} + \text{Log } \tilde{r} - \frac{1}{2} \right] + \dots \\ u_\theta \sim 4\pi A \sin \theta \left[\frac{1}{2r^2} - \text{Log } \tilde{r} - \frac{1}{2} \right] + \dots \\ u_z \equiv 0 \end{array} \right.$$

Dans ces formules nous avons volontairement conservé la constante A sans la développer en ϵ , puisqu'elle n'intervient, dans les expressions de u_r et u_θ qu'à titre de constante multiplicative des fonctions entre crochets.

Il est intéressant de comparer le résultat (38) avec celui obtenu pour le premier terme $\nu_1 \psi_1$ de la solution de Stokes (31), dans l'étude directe du cas du cylindre circulaire. On constate, en effet, que les deux résultats s'identifient à condition de choisir $r = \tilde{r}$ et $\nu_1 = 4\pi A$; Cette dernière relation est d'ailleurs purement formelle puisque $\nu_1(R)$ et $A(\epsilon)$ ne sont pas fonction de la même variable et, pour les distinguer, nous poserons :

$$(37) \quad \nu'_1(\epsilon) = 4\pi A(\epsilon)$$

On peut noter, de plus, que les fonctions $\nu_1(R)$ et $\nu'_1(\epsilon)$ ont des développements asymptotiques analogues lorsque R et ϵ tendent vers zéro. En utilisant les résultats du §. VII,2 et l'expression (33) de A , on obtient en effet :

$$(38) \quad \begin{cases} \nu_1(R) \sim (\text{Log } R)^{-1} + \left(\frac{1}{2} - \gamma + \text{Log } 4\right) (\text{Log } R)^{-2} + k_3 (\text{Log } R)^{-3} + \dots \\ \nu'_1(\epsilon) \sim (\text{Log } \epsilon)^{-1} + \frac{1 + \text{Log } 4}{2} (\text{Log } \epsilon)^{-2} + \left(\frac{1 + \text{Log } 4}{2}\right)^2 (\text{Log } \epsilon)^{-3} + \dots \end{cases}$$

Nous n'utiliserons pas directement cette analogie entre les variables R et ϵ , mais on peut faire à son sujet les remarques suivantes :

1) Lorsque ϵ tend vers zéro, la fonction $\nu'_1(\epsilon)$ tend vers zéro, de même, ainsi qu'on peut s'en assurer directement, que les expressions (32) de $u_r(\tilde{r}, \theta)$ et $u_\theta(\tilde{r}, \theta)$. On retrouve donc, sous cette forme, le paradoxe de Stokes pour les écoulements bidimensionnels.

2) La solution (32) étant exacte, on peut choisir ϵ librement, et, en particulier, le lier au nombre de Reynolds R .

Il est clair, d'après les formules (38), que, pour chaque fonction $\epsilon(R)$, il existe une fonction $\nu''_1(R) = \nu'_1(\epsilon(R))$, et qu'il existe certainement une fonction $\epsilon_1(R)$ particulière telle que $\nu''_1(R) \equiv \nu_1(R)^*$.

Du point de vue pratique, ceci signifie qu'il y a autant de coefficients limites $\nu''_1(R)$ que de fonctions $\epsilon(R)$. L'écoulement limite au voisinage du cylindre *dépend donc directement de la façon dont on effectue la double limite* : $\epsilon \rightarrow 0$, $R \rightarrow 0$. Dans le §. VII,2, on avait considéré le cas $\epsilon \equiv 0$, $R \rightarrow 0$, alors que, dans la suite, nous envisagerons le passage dans l'ordre suivant ϵ fixé $\neq 0$, $R \rightarrow 0$, puis $\epsilon \rightarrow 0$. Les limites obtenues sont, ainsi qu'on vient de le voir, différentes du point de vue mathématique, mais il est impossible d'affirmer que l'écoulement physiquement observé corresponde à l'un des processus limites, plutôt qu'à l'autre.

L'intérêt de ce deuxième processus réside en ce que la fonction $\nu'_1(\epsilon)$ est *exactement* connue, alors que, dans le premier, $\nu_1(R)$ n'est déterminée que de façon très imprécise par un développement en puissances de $\text{Log } R$ dont on a signalé au §. VII,2 les inconvénients ; on sait, de plus, que pour $\epsilon = 1$, c'est-à-dire pour la sphère (cf. [62]) la validité du développement asymptotique, limité au terme d'ordre R , s'étend (sans doute par hasard) jusqu'à des nombres de Reynolds de l'ordre de $R = 60$. En étudiant une famille d'ellipsoïdes de plus en plus allongés, on peut donc espérer atteindre le cas limite du cylindre, au moins en ce qui concerne certains paramètres, comme, par exemple, la fonction $R(\epsilon)$ qui caractérise l'apparition du point de décollement dans le plan $z = 0$, ($R(1) = 8$).

VII, 3. 2. 3. – Développement d'Oseen pour ϵ quelconque.

Nous allons entamer le calcul que nous venons de suggérer en recherchant, pour ϵ quelconque, les termes

* Il serait évidemment intéressant de connaître cette fonction $\epsilon_1(R)$; on ne peut guère qu'en définir une expression approchée en comparant les deux développements (38). Si on se limite à un terme, on obtient ainsi :

$$\epsilon = \epsilon_1(R) \sim \lambda R + \dots$$

En identifiant deux termes, on est conduit à

$$\epsilon = \frac{1}{2} e^{\gamma R} + \dots$$

d'ordre R dans le développement de Stokes. Dans ce but, il est nécessaire de connaître les deux premiers termes du développement d'Oseen. Comme il s'agit d'un écoulement tridimensionnel autour d'un obstacle ne donnant lieu à l'apparition d'aucune portance, on sait que ce développement (cf. [62]) s'écrit, en coordonnées sphériques : (les notations sont définies en annexe VII,4)

$$(39) \quad \Psi_0 = \frac{\rho^2}{2} \sin^2 \varphi + R \Psi_2 + \dots$$

avec :

$$\begin{cases} \Psi = R^2 \psi \\ \rho = R r_s \end{cases}$$

ψ et r_s étant les variables de Stokes, et :

$$(40) \quad \Psi_2 = -2C_2 (1 + \cos \varphi) \left[1 - e^{-\frac{1}{2} \rho (1 - \cos \varphi)} \right]$$

On en déduit sans difficulté, pour $\rho \rightarrow 0$, le comportement à l'infini de la solution de Stokes, en coordonnées sphériques r_s, φ , sous la forme :

$$\psi \sim \left(\frac{r_s^2}{2} - C_2 r_s \right) \sin^2 \varphi + R \frac{C_2}{4} r_s^2 \sin^2 \varphi (1 - \cos \varphi) + \dots$$

D'où les composantes du vecteur vitesse :

$$\begin{cases} u_\varphi \rightarrow -\left(1 - \frac{C_2}{r_s}\right) \sin \varphi - \frac{C_2 R}{4} \sin \varphi (1 - \cos \varphi) + \dots \\ u_{r_s} \rightarrow \left(1 - \frac{2C_2}{r_s}\right) \cos \varphi + \frac{C_2 R}{4} [2 \cos \varphi (1 - \cos \varphi) + \sin^2 \varphi] + \dots \\ u_\theta \rightarrow 0 \end{cases}$$

A partir de ces expressions, et en utilisant les formules de changement de coordonnées données en annexe VII,4, on obtient facilement les composantes u_r, u_θ, u_z du vecteur vitesse, en coordonnées cylindriques, sous la forme :

$$(41) \quad \begin{aligned} u_r &\sim \cos \theta \left[1 - C_2 \frac{z^2 + 2r^2}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \right] + C_2 \frac{R}{4} \left[\frac{-r^3}{2(z^2 + r^2)^{3/2}} + 2 \cos \theta - \frac{\cos 2\theta}{2} \frac{r(2z^2 + 3r^2)}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \right] + \dots \\ u_\theta &\sim -\sin \theta \left[1 - \frac{C_2}{\sqrt{z^2 + r^2}} \right] - C_2 \frac{R}{4} \left[2 \sin \theta - \frac{r \sin 2\theta}{\sqrt{z^2 + r^2}} \right] + \dots \\ u_z &\sim -C_2 \frac{rz \cos \theta}{(z^2 + r^2)^{3/2}} + \frac{C_2 R z}{8} [(2z^2 + r^2) - r^2 \cos 2\theta] + \dots \end{aligned}$$

Pour déterminer la constante C_2 , il suffit d'écrire le raccord avec le premier terme du développement à l'infini de la solution de Stokes (32). Celle-ci, pour les grandes valeurs de r, z , conduit aux résultats suivants:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi \sim \frac{2\pi\epsilon^2}{\sqrt{r^2 + z^2}} \\ \Psi \sim \frac{4\pi\epsilon^2}{\sqrt{r^2 + z^2}} \end{array} \right.$$

d'où :

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_r \sim \cos \theta \left[1 - \frac{4\pi A (2r^2 + z^2)}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \right] \\ u_\theta \sim \sin \theta \left[-1 + \frac{4\pi A}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right] + \dots \\ u_z \sim -\frac{4\pi A \cos \theta z^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}} + \dots \end{array} \right.$$

La comparaison des formules (41) et (42) montre que le raccord est effectivement possible pour les trois composantes u_r , u_θ , u_z , sans conduire à une contradiction ; on obtient ainsi :

$$(43) \quad C_2 = 4\pi A = \nu'_1 = \frac{2(1 - \epsilon^2)}{1 + \frac{2 - 3\epsilon^2}{2\sqrt{1 - \epsilon^2}} \text{Log} \left| \frac{1 + \sqrt{1 - \epsilon^2}}{1 - \sqrt{1 - \epsilon^2}} \right|}$$

A titre de vérification, on peut noter que, lorsque $\epsilon \rightarrow 1$, le second membre de (43) admet une limite égale à 3/4 ; on retrouve donc le cas classique de la sphère.

VII, 3. 3. – Seconde approximation au voisinage de l'ellipsoïde.

Nous considérons maintenant les expressions (32) de u_r , u_θ , u_z et p comme étant les premiers termes d'un développement asymptotique de la forme :

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_r = u_r + Ru_r^{(1)} + \dots \\ U_\theta = u_\theta + Ru_\theta^{(1)} + \dots \\ U_z = u_z + Ru_z^{(1)} + \dots \\ R(p - p_0) = p^{(0)} + Rp^{(1)} + \dots \end{array} \right.$$

Pour calculer les quatre fonctions $u_r^{(1)}$, $u_\theta^{(1)}$, $u_z^{(1)}$ et $p^{(1)}$, on est d'abord amené à formuler les remarques suivantes :

a) Les fonctions u_r , u_θ , u_z , et $p^{(0)}$, définies par les formules (32) sont respectivement de la forme :

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_r = \cos \theta f_1(r, z) \\ u_\theta = \sin \theta f_2(r, z) \\ u_z = \cos \theta f_3(r, z) \\ p^{(0)} = \cos \theta f_4(r, z) \end{array} \right.$$

Lorsqu'on porte le développement (44) dans les équations de Navier-Stokes complètes, on obtient pour les fonctions $u_r^{(1)}, u_\theta^{(1)}, u_z^{(1)}$ et $p^{(1)}$ des équations dont la partie homogène est la même que pour $u_r, u_\theta, u_z, p^{(0)}$, et qui ont un second membre représentant l'influence des termes de convection. Ce second membre est nécessairement quadratique par rapport aux $u_r, u_\theta, u_z, p^{(0)}$, donc ne fait intervenir que les fonctions circulaires des angles θ et 2θ .

b) Les formules (41), dont les termes d'ordre R ne contiennent également que des fonctions circulaires des angles θ et 2θ , montrent que les fonctions $u_r^{(1)}, u_\theta^{(1)}, u_z^{(1)}$ et $p^{(1)}$ ne dépendent, à l'infini que de ces fonctions circulaires.

De ces deux remarques, jointes à des questions de parité en θ évidentes, on déduit que l'on doit pouvoir écrire les fonctions inconnues $u_r^{(1)}, u_\theta^{(1)}, u_z^{(1)}, p^{(1)}$, sous la forme (46) :

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_r^{(1)} = u_0(r, z) + \cos \theta u_1(r, z) + \cos 2\theta u_2(r, z) \\ u_\theta^{(1)} = \sin \theta v_1(r, z) + \sin 2\theta v_2(r, z) \\ u_z^{(1)} = w_0(r, z) + \cos \theta w_1(r, z) + \cos 2\theta w_2(r, z) \\ p^{(1)} = p_0(r, z) + \cos \theta p_1(r, z) + \cos 2\theta p_2(r, z) \end{array} \right.$$

Par substitution dans les équations de Navier-Stokes, il s'avère que les trois problèmes relatifs à chacun des indices 0, 1 et 2 dans les expressions (46) se découplent entièrement. On est ainsi amené à résoudre trois systèmes différentiels linéaires, qui sont précisés dans l'annexe VII, 5.

Il est essentiel, vu le but recherché, de résoudre ces systèmes pour ϵ quelconque (on pourra toujours développer ensuite les solutions, pour ϵ petit, en variable r , afin de connaître l'allure de l'écoulement limite de Stokes).

Malheureusement cette résolution n'a pu être faite pour ϵ quelconque. Toutefois la structure des trois systèmes est relativement simple et nous pensons pouvoir réussir dans l'avenir à les intégrer explicitement.

VII, 3. 4. — Conclusion.

Bien que nous n'ayons pu atteindre complètement le but que nous nous étions fixé, il est clair que l'emploi du paramètre artificiel ϵ pose le problème de l'écoulement autour du cylindre sous un jour nouveau et que cette façon de procéder élimine entièrement les difficultés qui étaient apparues dans l'étude directe par suite

de la présence, dans $\nu_1(R)$, des termes logarithmiques qui excluaient toute possibilité de prolonger la validité du développement jusqu'à des nombres de Reynolds de l'ordre de l'unité. Nous pensons que ce seul fait justifie l'étude entreprise, mais il est clair que la recherche de l'apparition du décollement sur un cylindre est directement liée à la résolution des trois systèmes donnés dans l'annexe VII,5. Nous nous attacherons donc, dans l'avenir, à ce problème, afin de pouvoir comparer les résultats à ceux obtenus au moyen d'autres méthodes telles que celle des séries tronquées, proposée par Van DYKE [63].

S

Chapitre VIII

ÉCOULEMENT A FAIBLE NOMBRE DE REYNOLDS AUTOUR D'UNE PLAQUE PLANE.

VIII, 1. — FORME GÉNÉRALE DES ÉCOULEMENTS DE STOKES AUTOUR D'UNE PLAQUE PLANE.

La méthode d'intégration de l'équation biharmonique présentée, pour un dièdre, au chapitre III, s'applique également sans difficulté au cas d'une plaque plane de dimension finie. Les principales notations utilisées sont précisées sur la figure VIII,1, la plaque étant confondue avec la portion $-a \leq \bar{x} \leq a$ de l'axe $O\bar{x}$.

Des considérations analogues à celles développées dans le chapitre III permettent d'écrire la solution $\bar{\psi}$ de l'équation biharmonique (1) sous la forme (2) d'une somme d'une fonction symétrique $\bar{\psi}_2$ et d'une fonction antisymétrique $\bar{\psi}_1$ définies par (3)

$$(1) \quad \bar{\Delta}(\bar{\Delta}\bar{\psi}) = 0$$

$$(2) \quad \bar{\psi} = \bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2$$

$$(3) \quad \begin{cases} \bar{\psi}_1 = A(z) + A(\bar{z}) + \bar{z}C(z) + zC(\bar{z}) \\ \bar{\psi}_2 = i[B(z) - B(\bar{z}) + \bar{z}D(z) - zD(\bar{z})] \end{cases}$$

Les fonctions A, B, C, D de la variable $z = \bar{x} + i\bar{y}$ sont réelles sur l'axe réel, et holomorphes en tout point du plan complexe excepté, peut-être, sur la coupure AB , à l'infini, et, éventuellement, en certains points ou sur certaines lignes singulières à distance finie (ceci afin de pouvoir traiter des problèmes où interviennent, dans l'écoulement, d'autres singularités que celles existant sur AB). Ces quatre fonctions doivent vérifier, de part et d'autre de la coupure, les conditions (4) imposées par l'adhérence du fluide à la plaque.

$$(4) \quad \begin{cases} A'^+ + \bar{x}C'^+ + C^- = 0 \\ A'^- + \bar{x}C'^- + C^+ = 0 \\ B'^+ + \bar{x}D'^+ - D^- = 0 \\ B'^- + \bar{x}D'^- - D^+ = 0 \end{cases}$$

Pour résoudre le système (4), on peut penser tout d'abord appliquer directement la méthode exposée au chapitre III et basée sur l'hypothèse que les fonctions A', C', B', D' sont *uniformes* et de *degré fini* à l'infini, dans le plan muni de la coupure AB . Elles doivent vérifier, de plus, une condition de Holder en A et B , imposant aux *vitesses* de ne pas croître plus vite que $\rho^{-\beta}$ avec $\beta < 1$ lorsque $\rho \rightarrow 0$ (Les vitesses peuvent donc être infinies en A et B).

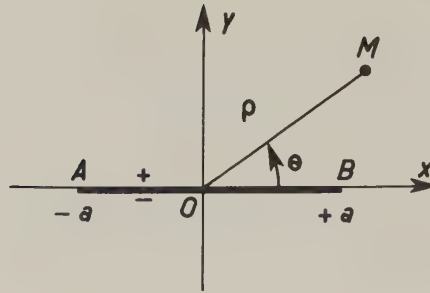


Figure VIII, 1.

Cette façon de procéder permet d'obtenir effectivement une première série de solutions, données par les formules (5), dans lesquelles P_1, Q_1, P_2, Q_2 désignent quatre fonctions arbitraires de la variable z , holomorphes en tout point de la coupure AB (ce sont des polynômes s'il n'y a aucune singularité en dehors de AB).

$$(5) \left\{ \begin{aligned} A(z) &= -zP_1(z) - 2k \operatorname{Log} \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a} \right) + \frac{z(z^2 - a^2) Q_1'(z) + (2a^2 - z^2) Q_1(z) + kz}{\sqrt{z^2 - a^2}} \\ C(z) &= P_1(z) - \frac{(z^2 - a^2) Q_1'(z) + zQ_1(z) + k}{\sqrt{z^2 - a^2}} \\ B(z) &= 2P_2(z) - zP_2'(z) + \frac{zQ_2(z)}{\sqrt{z^2 - a^2}} \\ D(z) &= P_2'(z) - \frac{Q_2(z)}{\sqrt{z^2 - a^2}} \\ \psi_1 &= 4\operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} [i\bar{y}(z^2 - a^2) Q_1'(z) + (a^2 - \bar{x}z) Q_1(z) + ik\bar{y}] - i\bar{y}P_1 - k \operatorname{Log} \left| \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a} \right| \right\} \\ \psi_2 &= 4\operatorname{Re} \left\{ iP_2 + \bar{y}P_2' - \frac{\bar{y}Q_2}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right\} \end{aligned} \right.$$

On peut remarquer toutefois que l'hypothèse d'uniformité des fonctions A', B', C', D' n'est pas toujours réalisée. C'est le cas, en particulier, de l'écoulement autour d'un cylindre lorsque le paradoxe de Stokes s'applique, puisqu'on sait que, dans cet écoulement, les vitesses croissent logarithmiquement à l'infini, ce qui entraîne la présence de terme en $\operatorname{Log} z$ dans certaines des fonctions A', B', C', D' . Les formules (5) ne peuvent donc s'appliquer à de tels écoulements, ce qui nous conduit à rechercher une classe de solution plus générale où l'hypothèse d'uniformité, pour les dérivées premières, c'est-à-dire pour les vitesses, n'est pas réalisée.

Ceci se trouve fait en détail dans l'annexe VIII,1 ci-jointe, la résolution étant basée sur le fait que l'on peut montrer au moyen d'arguments physiques que les fonctions $A''(z), C''(z), B''(z), D''(z)$ sont nécessairement uniformes. On définit alors pour ces fonctions un problème aux limites analogue au problème (4) que l'on résout* avec les hypothèses que ces quatre fonctions sont de degré fini à l'infini, et vérifient en A et B une condition de Holder analogue à celle que l'on avait imposée précédemment aux fonctions A', B', C', D' *. La solution obtenue s'écrit alors sous la forme (6), dans laquelle k, k_1, k_2, α et β sont des constantes réelles arbitraires tandis que P_1, Q_1, P_2, Q_2 désignent quatre fonctions arbitraires de la variable z , réelles sur l'axe réel, et holomorphes en tout point de la coupure AB , y compris les extrémités A et B .

* Voir Annexe pour plus de détails.

$$\begin{aligned}
 (6) \quad \left\{ \begin{aligned}
 A'(z) &= -\sqrt{z^2 - a^2} [(2z^2 + a^2) Q_1(z) + z(z^2 - a^2) Q_1'(z) + 3k_1 z + k_2] \\
 &\quad + a^2 k_1 \operatorname{Log} \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a} \right) + z P_1''(z) - 3P_1'(z) - \alpha \operatorname{Log} \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a} \right) + \frac{\alpha z + a^2 \beta}{\sqrt{z^2 - a^2}} \\
 C(z) &= \sqrt{z^2 - a^2} [(z^2 - a^2) Q_1(z) - k_1 z] + a^2 k_1 \operatorname{Log} \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a} \right) - P_1'(z) \\
 &\quad + k_2 [z \operatorname{Log} \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a} \right) - \sqrt{z^2 - a^2}] - \alpha \operatorname{Log} \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a} \right) - \beta \sqrt{z^2 - a^2} \\
 C'(z) &= \sqrt{z^2 - a^2} [3z Q_1(z) + (z^2 - a^2) Q_1'(z) - 2k_1] + k_2 \operatorname{Log} \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a} \right) - P_1''(z) - \frac{\alpha + \beta z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \\
 B'(z) &= P_2(z) - z P_2'(z) + \frac{z f(z)}{\sqrt{z^2 - a^2}} + Q_2(z) \sqrt{z^2 - a^2} + k \operatorname{Log} \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a} \right) \\
 &\quad \text{avec } f(z) = z Q_2(z) + (z^2 - a^2) Q_2'(z) + k \\
 D'(z) &= P_2'(z) - \frac{f(z)}{\sqrt{z^2 - a^2}} \\
 D(z) &= P_2(z) - Q_2(z) \sqrt{z^2 - a^2} - k \operatorname{Log} \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a} \right)
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Les formules (5) et (6) appellent un certain nombre de remarques :

1 – Il faut tout d'abord noter que la classe de solutions définie par (6) ne contient pas la classe (5) dans sa totalité puisque les conditions de Holder, pour construire la solution (6) sont plus restrictives que celles imposées pour obtenir (5). Elle contient cependant toutes les solutions de la classe (5) pour lesquels ces conditions plus restrictives sont réalisées.

2 – La restriction que nous venons de mentionner n'a pratiquement que fort peu d'importance, les solutions physiquement admissibles ne devant présenter aucune singularité pour les vitesses en A et B et vérifiant, par conséquent, la condition de Holder, plus restrictive, nécessaire pour obtenir (6). Ceci nous permet d'affirmer que la classe de solutions (6) est extrêmement générale et contient en fait *toute solution physiquement admissible pour l'écoulement de Stokes autour d'une plaque plane* de dimension finie, même en présence de singularités extérieures (puits, sources, ou même autres obstacles). Il ne faut pas oublier, en effet, que les quatre fonctions P_1, Q_1, P_2, Q_2 sont holomorphes en tout point du plan complexe, et même au voisinage de tous les points de la coupure AB mais peuvent, comme les fonctions $ABCD$, être singulières en certains points ou sur certaines lignes à distance finie, puisque, pour obtenir (6), on n'a fait aucune hypothèse restrictive sur l'existence de telles singularités*.

3 – Signalons enfin, à titre de vérification, que les formules (5) et (6) permettent de retrouver les résultats déjà obtenus pour la plaque plane semi-infinie après avoir fait un changement d'axe pour amener l'origine O au point B et fait tendre la constante a vers l'infini.

* Cette classe de solutions était dénommée $\mathcal{A}$ au chapitre III.

VIII, 2. — ÉCOULEMENT, UNIFORME A L'INFINI, AUTOUR D'UNE PLAQUE PLANE.

VIII, 2. 1. — Généralités.

Si nous nous intéressons au problème de l'écoulement, uniforme à l'infini, autour de la plaque, la solution cherchée ne doit avoir aucune singularité dans le plan complexe, excepté, peut-être, sur la coupure. L'application du théorème de Liouville nous permet alors d'affirmer que les quatre fonctions P_1, P_2, Q_1, Q_2 sont des polynômes en z , puisqu'elles sont nécessairement holomorphes dans tout le plan complexe. Il s'agit, maintenant, de déterminer ces quatre polynômes pour satisfaire la condition d'écoulement uniforme à l'infini.

A priori, l'existence du paradoxe de Stokes pour les cylindres nous incite à la prudence car le raccord direct n'est peut-être pas possible sans passer par l'intermédiaire d'une région de type Oseen. On peut noter, cependant, que ce paradoxe n'a été démontré que pour les cylindres dont la surface S est suffisamment régulière, et seulement pour les écoulements tels que $\bar{\psi}$, $\partial\bar{\psi}/\partial n$ et $\partial^2\bar{\psi}/\partial n^2$ soient définis et bornés sur S . On peut mettre en doute la validité de telles hypothèses dans le cas de la plaque plane par suite de la présence des deux points anguleux A et B , et c'est ce qui explique que nous commençons par rechercher au §. VIII.2.2, une solution avec raccord *direct* à l'infini, nous réservant, au §. VIII.2.3 la possibilité de reprendre le problème en tenant compte de la présence d'une zone de type Oseen.

VIII, 2. 2. — Solution uniformément valable.

VIII, 2. 2. 1. — Solution à vitesse régulière.

Commençons par chercher la solution parmi la classe (6), en imposant que la vitesse reste finie en A et B . Cette dernière condition impose, comme on peut s'en assurer facilement, la relation (7) :

$$(7) \quad P'_1(z) = (z^2 - a^2) R(z)$$

où $R(z)$ est un polynôme quelconque.

Puisque $\bar{\psi}_1$ doit croître linéairement à l'infini, il est tout d'abord nécessaire que ses dérivées secondes par rapport à z ou $\bar{z}$ tendent vers zéro lorsque $|z| \rightarrow \infty$, ce qui impose, entre autres :

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} [A''(z) + \bar{z}C''(z)] = 0$$

Cette relation doit être vraie en particulier sur l'axe réel, ce qui entraîne :

$$(8) \quad \lim_{|\bar{x}| \rightarrow \infty} [A''(\bar{x}) + \bar{x}C''(\bar{x})] = 0$$

Or, en utilisant les formules (6), ou, mieux, l'expression de $A''(z) + zC''(z)$ donnée en annexe, on voit que la condition (8) est équivalente à la suivante :

$$\lim_{|\bar{x}| \rightarrow \infty} [P'_1(\bar{x})] = 0$$

Cette dernière relation n'est possible, $P'_1(\bar{x})$ étant un polynôme, que si $P'_1(\bar{x}) \equiv 0$. Il en résulte que $P''_1(z) \equiv 0$, puis, utilisant (7) que :

$$(9) \quad P'_1(z) \equiv 0$$

Examinons maintenant la dérivée croisée $\frac{\partial^2 \bar{\psi}_1}{\partial \bar{z} \partial z} = C'(z) + C'(\bar{z})$ qui, physiquement, représente le tourbillon et doit, elle aussi s'annuler lorsque $|z| \rightarrow \infty$. Il est clair, d'après l'expression (6) de $C'(z)$ et le fait que $P'_1(z) \equiv 0$, que, sur l'axe réel, on a :

$$\omega(\bar{x}) = [C'(z) + C'(\bar{z})]_{z \equiv \bar{x}} \equiv 2\sqrt{\bar{x}^2 - a^2} [3\bar{x}Q_1(\bar{x}) + (\bar{x}^2 - a^2) Q'_1(\bar{x}) - 2k_1] \\ + k_2 \operatorname{Log} \left(\frac{\bar{x} + \sqrt{\bar{x}^2 - a^2}}{a} \right) - \frac{\alpha + \beta \bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 - a^2}}$$

La condition $\lim_{|\bar{x}| \rightarrow \infty} [\omega(\bar{x})] \equiv 0$ impose alors les nouvelles conditions :

$$(10) \quad \begin{cases} Q_1(z) \equiv 0 \\ k_1 = k_2 = \beta \equiv 0 \end{cases}$$

Tenant compte des conditions *nécessaires* (9) et (10), il vient :

$$(11) \quad \begin{cases} C'(z) = -\frac{\alpha}{\sqrt{z^2 - a^2}}, \quad \text{d'où} \quad C(z) = -\alpha \operatorname{Log} \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a} \right) \\ A'(z) = -\alpha \operatorname{Log} \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a} \right) + \frac{\alpha z}{\sqrt{z^2 - a^2}}, \quad \text{d'où} \\ A(z) = 2\alpha \sqrt{z^2 - a^2} - \alpha z \operatorname{Log} \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a} \right) \end{cases}$$

Des expressions (11) on tire finalement $\bar{\psi}_1$ sous la forme :

$$(12) \quad \boxed{\bar{\psi}_1 = 2\alpha \operatorname{Re} \left\{ z^2 - a^2 \right\}^{1/2} - 2\alpha \bar{x} \operatorname{Log} \left| \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a} \right|}$$

Un raisonnement analogue pour $\bar{\psi}_2$ conduit de même à la seule expression possible :

$$(13) \quad \boxed{\bar{\psi}_2 = -2k\bar{y} \operatorname{Log} \left| \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a} \right|}$$

La présence du terme logarithmique dans les solutions (12) et (13) montre que l'on ne peut trouver finalement aucune solution croissant linéairement à l'infini comme on le souhaitait. On peut donc énoncer la proposition suivante qui exprime le paradoxe de Stokes pour une plaque plane :

Proposition 33.

Il n'existe aucune solution de l'équation biharmonique $\Delta \Delta \bar{\psi} = 0$ vérifiant simultanément les conditions suivantes :

1 — $\bar{\psi}$ et ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre 4 sont définis en tout point du plan extérieur au segment AB .

2 — Sur AB , $\bar{\psi} = \partial\bar{\psi}/\partial n = 0$

3 — En A et B , $\partial\bar{\psi}/\partial n = 0$

4 — $\bar{\psi}$ croît linéairement à l'infini.

Ce résultat signifie qu'une solution physiquement admissible ne pourra exister qu'en envisageant la présence d'un domaine de type Oseen (cf. VIII,2.3).

VIII, 2. 2. 2. — Solution à vitesse singulière.

Cherchons maintenant s'il existe une solution parmi la classe (5), en abandonnant la condition de vitesse nulle en A et B (mais en conservant la condition d'annulation de la fonction $\bar{\psi}$ elle même). On peut refaire un raisonnement tout à fait analogue à celui du §. VIII,2.2.1, aussi nous ne donnons ci-dessous que le résultat obtenu et la position correspondante.

$$(14) \quad \begin{cases} \bar{\psi}_1 = Re \left\{ \frac{\bar{x}z - a^2}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right\} \\ \bar{\psi}_2 = Re \left\{ \frac{\bar{y}z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right\} \end{cases}$$

Proposition 34.

Le paradoxe de Stokes pour la plaque plane n'existe plus si on abandonne la condition 3) de la proposition 33 c'est-à-dire la régularité des vitesses aux extrémités A et B de la plaque. On est alors capable de construire une solution, donnée par les formules (14), à croissance linéaire à l'infini.

A titre de curiosité, nous avons tracé numériquement les lignes de courant définies par les formules (14). Les champs obtenus pour chacune des solutions symétrique et antisymétrique (incidence $i = 0$ et $i = 90^\circ$ respectivement) sont données sur les planches VIII,1 et VIII,2. Au simple vu de ces planches, il est assez difficile d'affirmer que la solution (14), mathématiquement possible est physiquement inadmissible. L'allure obtenue est en effet conforme à celle attendue par l'intuition, et les singularités des vitesses en A et B ne sont apparentes, sur la planche VIII,1, que par le resserrement des lignes de courant au voisinage de ces points. Quant à la planche VIII,2, les singularités y sont totalement "invisibles", les lignes de courant étant telles qu'on peut les attendre.

VIII, 2. 3. — Solution du type Stokes-Oseen.

Si on exclut la solution (14), que nous venons d'examiner, comme étant physiquement inadmissible, le paradoxe de Stokes existe et aucun raccord direct avec l'écoulement uniforme à l'infini n'est possible. On va donc envisager deux régions, où deux développements différents seront valables :

Développement de Stokes :

$$(15) \quad \bar{\psi} = \delta_0 \tilde{\psi}^0 + \delta_1 \tilde{\psi}^{(1)} + \dots \delta_n \tilde{\psi}^{(n)} + \dots$$

où $\tilde{\psi}^0$, $\tilde{\psi}^1$ sont des fonctions de $(\bar{x}, \bar{y})$ et δ_0 , δ_1 des fonctions de jauge inconnues à priori et dépendant de R .

Développement d'Oseen :

On introduit les variables d'Oseen caractérisées par :

$$(16) \quad z^* = Rz$$

et la fonction de courant ψ^* telle que :

$$(17) \quad \psi^* = R\bar{\psi}$$

Tenant compte du fait que l'écoulement à l'infini est uniforme en première approximation, le développement d'Oseen s'écrit sous la forme :

$$(18) \quad \psi^* = -x^* + \delta_1^* \psi_1^* + \dots$$

ψ_1^* est solution de l'équation d'Oseen, et peut donc s'écrire sous la forme générale donnée au chapitre VII ;

Il est donc facile de développer, dans le cas de la plaque plane le calcul maintenant classique de Proudman et Pearson pour le cylindre circulaire, et nous donnons simplement ici le résultat obtenu :

Proposition 35.

Pour le problème de la plaque plane finie placée dans un écoulement uniforme à l'infini, on peut trouver une solution et une seule de l'équation de Stokes qui puisse être raccordée à un domaine de type Oseen à l'infini et ne présente aucune singularité pour les vitesses aux extrémités de la plaque. Cette solution, qui appartient à la classe de fonctions définies par les formules (6), n'est autre que celle donnée par les formules (12) et (13), dans chacun des cas où la plaque est placée dans le lit du vent ou perpendiculairement à celui-ci.

On peut noter de plus les points suivants qui viennent préciser la solution :

- a) Le raccord des deux développements (15) et (18) entraîne que $\delta_0 = (\text{Log } 1/R)^{-1}$, c'est-à-dire que l'ordre de grandeur de $\bar{\psi}$ au voisinage de la plaque est le même que dans le problème du cylindre circulaire.
- b) Les constantes 2α et $2k$ des formules (12) et (13), pour chacun des cas symétrique et antisymétrique sont reliés à la vitesse à l'infini (égale à l'unité par la non dimensionnalisation) au moyen des formules :

$$-2\alpha = 2k = 1$$

- c) Le problème étant linéaire on peut, par superposition, obtenir la solution de Stokes dans le cas d'une incidence i quelconque sous la forme suivante :

$$(19) \quad \psi = \left(\text{Log } \frac{1}{R}\right)^{-1} [(\bar{y} \cos i - \bar{x} \sin i) \text{Log } \left| \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a} \right| + \sin i \text{Re} \{z^2 - a^2\}^{1/2}] + \dots$$

- d) Comme dans le cas du cylindre circulaire, les fonctions $\psi^{(1)} \dots \psi^{(n)} \dots$ dans le développement de Stokes (15) sont toutes de la forme (12) ou (13), la suite des δ_n comprenant d'abord les puissances succes-

sives de $\delta_0 = (\text{Log } 1/R)^{-1}$. Les $\tilde{\psi}^{(n)}$ ne diffèrent donc les uns des autres, dans chacun des cas symétriques et antisymétrique, que par une constante multiplicative. Il s'avère ainsi qu'on peut inclure le second ordre, par exemple dans le cas antisymétrique, en modifiant la définition de δ_0 de la façon suivante :

$$\delta_0 = (\text{Log } \frac{1}{R} + \gamma - 3 \text{ Log } 2)^{-1}$$

où γ est la constante d'Euler.

Malheureusement les coefficients successifs ne sont pas identiques pour les solutions symétrique et antisymétrique.

e) La formule (19) permet d'évaluer le frottement à la paroi sous la forme (20) :

$$(20) \quad \tau \sim \frac{1}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}$$

(ρ désigne la distance comptée à partir du milieu O de la plaque).

Le frottement à la paroi, c'est-à-dire le *tourbillon*, est donc *singulier* en $\rho = \pm a$, c'est-à-dire au bord d'attaque et au bord de fuite de la plaque, et on retrouve, pour cette singularité algébrique le *même exposant* $-1/2$ que celui déjà mis en évidence au chapitre IV pour les problèmes du bord d'attaque et du bord de fuite aux grands nombres de Reynolds.

f) On a tracé numériquement le champ des lignes de courant données par la formule (19), pour diverses incidences, en faisant abstraction du coefficient multiplicatif $(\text{Log } 1/R)^{-1}$. Les résultats obtenus sont donnés sur les planches VIII,3 à VIII,9 à propos desquelles on peut faire les remarques ci-dessous :

1) Le resserrement des lignes de courant au voisinage de A et B qui avait été constaté pour la solution à vitesse singulière n'existe plus.

2) La ligne de séparation entre l'écoulement à l'intrados et à l'extrados aboutit toujours aux extrémités A et B de la plaque, ce que l'on peut d'ailleurs démontrer à partir de la formule (19), sauf, bien sûr si l'incidence est égale à 90° .

3) Pour i tendant vers 90° (cf. planche VIII,9), la ligne de séparation se déforme rapidement pour tendre vers sa position limite correspondant à $i = 90^\circ$. Sur la planche VIII,7 correspondant à une incidence de 88° , on peut constater que les lignes de courant qui ne passent pas trop près de la plaque sont pratiquement confondues avec leurs positions limites pour $i = 90^\circ$, données sur la planche VIII,8. Par contre, celles qui frôlent la plaque sont très déformées, mais on peut remarquer que les valeurs de ψ correspondantes sont très faibles, donc, aussi, les vitesses. La singularité mathématique concernant le point d'attache de la ligne de séparation pour $i = 90^\circ$, ne se traduira donc physiquement par aucun changement notable de l'écoulement.

S

CONCLUSION GÉNÉRALE

Nous voudrions, dans cette conclusion, insister sur les trois points de notre étude qui nous paraissent les plus importants, à savoir : l'utilisation systématique des méthodes de perturbation, concrétisée par les tableaux donnés en annexe ; l'étude locale des solutions au voisinage des parois ; enfin, les résultats obtenus concernant les problèmes de séparation.

I — On a pu constater, au cours de ce travail, qu'une grande partie des exemples traités faisait directement appel à l'utilisation des quatre tableaux donnés en annexe (planche I à IV), tableaux qui regroupent les formes asymptotiques des équations de Navier-Stokes, et qui, dans le cas des singularités algébriques, résument les conditions de raccord entre deux domaines décrits par des approximations distinctes. On peut faire, à ce propos, plusieurs remarques :

1) Le fait que les conditions de raccord ne soient écrites que pour les comportements algébriques (ou, éventuellement, logarithmiques, comme on l'a vu au chapitre II), limite l'utilisation des tableaux II, III et IV, et donc les conclusions que l'on peut en tirer, à ces seuls cas. Cette limitation n'est pas très grave, car, dans la majeure partie des problèmes, les singularités rencontrées sont effectivement de ce type. S'il n'en est pas ainsi dans un problème déterminé, ou si on veut prolonger cette étude, rien n'empêche de dresser de nouveaux tableaux correspondants à d'autres types de singularités, le principe de la méthode restant le même.

2) La méthode proposée, basée finalement sur l'existence des trois paramètres λ , θ , ϵ mis en évidence au chapitre II, est généralisable dans de nombreuses directions : recherche systématique de la seconde approximation ; cas où il existe un paramètre petit autre que le nombre de Reynolds ou son inverse ; cas des écoulements compressibles ... etc... Nous avons déjà envisagé un certain nombre de ces problèmes mais les résultats obtenus sont trop fragmentaires pour être présentés ici.

3) Les exemples d'application présentés ont été choisis en vue de l'étude des phénomènes de séparation, au sens où nous les avons définis (Une ligne de courant et une seule, autre que la paroi, issue de celle-ci ou y aboutissant). Il est clair, cependant, que cette liste d'exemples n'est pas limitative et qu'on peut, à partir des mêmes bases, aborder bien d'autres problèmes.

II — L'étude locale des solutions au voisinage de certains points ou même de certaines lignes est très classique. Les résultats qui ont été obtenus au chapitre III et utilisés ensuite pour l'étude locale des singularités, font cependant appel à une méthode qui sort de ce cadre classique, en ce sens qu'on ne recherche pas directement un développement asymptotique en fonction d'une variable petite, mais qu'on résout exactement et avec un minimum d'hypothèses, une équation approchée, vérifiée, en première approximation, dans un certain domaine, par la solution de l'équation exacte. Il faut d'ailleurs remarquer que cette façon de procéder se trouve facilitée du fait qu'on est amené à résoudre l'équation biharmonique pour laquelle l'emploi, classique en élasticité, des fonctions de variables complexes permet d'obtenir une classe très large de solutions.

III — C'est finalement l'utilisation des résultats des chapitres II et III qui nous a permis d'obtenir ou de retrouver un certain nombre de résultats concernant les problèmes de séparation ; nous voudrions, maintenant les passer en revue très brièvement :

1) En ce qui concerne le problème du décollement (ou du recollement) en un point de la paroi de courbure finie, non nulle, il est clair, qu'au moins en ce qui concerne les écoulements à faible nombre de Reynolds, il

n'existe aucune singularité au voisinage du point de séparation ; pour les écoulements à grand nombre de Reynolds, on peut affirmer, d'après les résultats du chapitre V, que, si on revient aux équations complètes de Navier-Stokes, il n'existe, là non plus, aucune singularité : cette conclusion est confirmée et expliquée par le travail de Dean que nous avons spécialement mentionné. Ceci ne signifie pas toutefois, que la solution de couche-limite soit régulière en ce point, mais nous savons qu'il n'existe que deux cas possibles : ou bien elle est régulière et il n'y a alors pas besoin d'introduire un domaine Navier-Stokes, au moins en ce qui concerne les deux premières approximations, la solution des équations de Prandtl étant prolongeable au delà du point de décollement ; ou bien elle est singulière (c'est-à-dire le frottement s'annule comme $x^{1/2}$ x étant la distance au point de séparation) et l'étude présentée au chapitre V permet de conclure que, de toute façon, il n'existe pas de domaine Navier-Stokes, la solution de Goldstein étant prolongeable, *si on se limite à la première approximation*. La singularité du frottement n'apparaît qu'à la *seconde approximation* pour laquelle il est nécessaire d'introduire un domaine décrit par une équation linéaire, de type équation d'Oseen, dont la solution, qui ne présente sans doute plus de singularité au point de décollement, ne peut être obtenue que si on connaît les conditions limites aval.

2) Pour les problèmes du bord d'attaque et du bord de fuite, caractéristiques de la séparation en un point de rebroussement de la paroi, l'étude locale du chapitre III et surtout la solution globale présentée au chapitre VIII permettent d'affirmer qu'il existe, en général, une singularité en ces points, même pour les écoulements à faible nombre de Reynolds. Cette singularité correspond à un comportement algébrique du frottement à la paroi de la forme $1/\sqrt{x}$, x étant la distance au point de rebroussement. Il est tout-à-fait probable, sans qu'on puisse le montrer de façon certaine, qu'une telle singularité existe également pour les écoulements à grand nombre de Reynolds.

3) Enfin, au sujet du problème de la séparation en un point anguleux de la paroi, aucun résultat nouveau par rapport à ceux de Moffatt et de Lugt et Schwiderski n'a pu être obtenu. Les conclusions de ces auteurs permettent toutefois d'affirmer que, même pour les écoulements à faible nombre de Reynolds, il existe en un tel point, une singularité de nature complexe.

S

ANNEXES

$\epsilon \rightarrow$ $\lambda \downarrow$	$\epsilon \ll 1$ Contraintes visqueuses négligeables	$\epsilon \gg 1$ Contraintes visqueuses prépondérantes	$\epsilon = 1$ Mouvements visqueux classiques
$\lambda \ll 1$	$\frac{\partial^2 \bar{\psi}^{(0)}}{\partial \bar{y}^2} = f(\bar{\psi}^{(0)})$ Euler unidimensionnel (E.1D) $\psi_0 = \frac{LU_\infty}{\epsilon \lambda R} \quad \Omega_0 = \frac{U_\infty}{Le \lambda^3 \theta^2 R}$ $u_0 = \frac{U_\infty}{\epsilon \lambda^2 \theta R} \quad v_0 = \frac{U_\infty}{\epsilon \lambda \theta R}$ $p_0 = \rho_\infty U_\infty^2 \frac{1}{\epsilon^2 \lambda^4 \theta^2 R^2}$	$\frac{\partial^4 \bar{\psi}^{(0)}}{\partial \bar{y}^4} = 0$ Stokes unidimensionnel (S.1D) $\psi_0 = \frac{LU_\infty}{\epsilon \lambda R} \quad \Omega_0 = \frac{U_\infty}{Le \lambda^3 \theta^2 R}$ $u_0 = \frac{U_\infty}{\epsilon \lambda^2 \theta R} \quad v_0 = \frac{U_\infty}{\epsilon \lambda \theta R}$ $p_0 = \rho_\infty U_\infty^2 \frac{1}{\epsilon \lambda^4 \theta^2 R^2}$	$\frac{\partial \bar{\psi}^{(0)}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{\psi}^{(0)}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{\psi}^{(0)}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{\psi}^{(0)}}{\partial \bar{y}^2} = \frac{\partial^3 \bar{\psi}^{(0)}}{\partial \bar{y}^3} + f(\bar{x})$ Prandtl (C.L.) $\psi_0 = \frac{LU_\infty}{\lambda R} \quad \Omega_0 = \frac{U_\infty}{L \lambda^3 \theta^2 R}$ $u_0 = \frac{U_\infty}{\lambda^2 \theta R} \quad v_0 = \frac{U_\infty}{\lambda \theta R}$ $p_0 = \rho_\infty U_\infty^2 \frac{1}{\lambda^4 \theta^2 R^2}$
$\lambda = 1$	$\Delta \bar{\psi}^{(0)} = f(\bar{\psi}^{(0)})$ Euler bidimensionnel (E.2D) $\psi_0 = \frac{LU_\infty}{\epsilon R} \quad \Omega_0 = \frac{U_\infty}{Le \theta^2 R}$ $u_0 = \frac{U_\infty}{\epsilon \theta R} \quad v_0 = \frac{U_\infty}{\epsilon \theta R}$ $p_0 = \rho_\infty U_\infty^2 \frac{1}{\epsilon^2 \theta^2 R^2}$	$\Delta \Delta \bar{\psi}^{(0)} = 0$ Stokes bidimensionnel (S.2D) $\psi_0 = \frac{LU_\infty}{\epsilon R} \quad \Omega_0 = \frac{U_\infty}{Le \theta^2 R}$ $u_0 = \frac{U_\infty}{\epsilon \theta R} \quad v_0 = \frac{U_\infty}{\epsilon \theta R}$ $p_0 = \rho_\infty U_\infty^2 \frac{1}{\epsilon \theta^2 R^2}$	$\left(\frac{\partial \bar{\psi}^{(0)}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{\psi}^{(0)}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \right) (\Delta \bar{\psi}^{(0)}) = \Delta \Delta \bar{\psi}^{(0)}$ Navier-Stokes (N.S) $\psi_0 = \frac{LU_\infty}{R} \quad \Omega_0 = \frac{U_\infty}{L \theta^2 R}$ $u_0 = \frac{U_\infty}{\theta R} \quad v_0 = \frac{U_\infty}{\theta R}$ $p_0 = \rho_\infty U_\infty^2 \frac{1}{\theta^2 R^2}$

Planche I : Formes simplifiées des équations de N-S.

$\mathcal{D}_1 \downarrow$ $\mathcal{D}_2 \rightarrow$	Euler bidimensionnel	Navier-Stokes	Stokes bidimensionnel	Euler unidimensionnel	Prandtl	Stokes unidimensionnel
	$\lambda_2 = 1, p_2 = 0$ $\epsilon_2 \ll 1, r_2 > 0$	$\lambda_2 = 1, p_2 = 0$ $\epsilon_2 = 1, r_2 = 0$	$\lambda_2 = 1, p_2 = 0$ $\epsilon_2 \gg 1, r_2 < 0$	$\lambda_2 \ll 1, p_2 > 0$ $\epsilon_2 \ll 1, r_2 > 0$	$\lambda_2 \ll 1, p_2 > 0$ $\epsilon_2 = 1, r_2 = 0$	$\lambda_2 \ll 1, p_2 > 0$ $\epsilon_2 \gg 1, r_2 < 0$
Euler bidimensionnel $\lambda_1 = 1, p_1 = 0$ $\epsilon_1 \ll 1, r_1 > 0$	$q_1 > q_2$ $(q_2 - q_1)(\alpha_2 + \beta_2)$ $+ (r_2 - r_1) = 0$ Indétermination $(r_2 > r_1)$	$q_1 > q_2$ $(q_2 - q_1)(\alpha_2 + \beta_2)$ $- r_1 = 0$ Impossibilité	$q_1 > q_2$ $(q_2 - q_1)(\alpha_2 + \beta_2)$ $+ (r_2 - r_1) = 0$ Impossibilité	$q_1 > q_2 + p_2$ $p_2(1 + \beta_2) + (r_2 - r_1)$ $+ (q_2 - q_1)(\alpha_2 + \beta_2) = 0$ Indétermination	$q_1 > q_2 + p_2$ $p_2(1 + \beta_2) + (r_2 - r_1)$ $+ (q_2 - q_1)(\alpha_2 + \beta_2) = 0$ Indétermination	$q_1 > p_2 + q_2$ $p_2(1 + \beta_2) + (r_2 - r_1)$ $+ (q_2 - q_1)(\alpha_2 + \beta_2) = 0$ Indétermination
Navier-Stokes $\lambda_1 = 1, p_1 = 0$ $\epsilon_1 = 1, r_1 = 0$	$q_1 > q_2$ $q_1 = q_2 + \frac{r_2}{\alpha_2 + \beta_2}$ Unicité	$q_1 > q_2$ $q_1 = q_2$ Impossibilité ou $\mathcal{D}_1 \equiv \mathcal{D}_2$	$q_1 > q_2$ $(q_2 - q_1)(\alpha_2 + \beta_2)$ $+ r_2 = 0$ Impossibilité	$q_1 = q_2 + \frac{p_2(1 + \beta_2) + r_2}{\alpha_2 + \beta_2}$ Unicité si : $p_2(1 - \alpha_2) + r_2(\alpha_2 + \beta_2) > 0$ sinon : Impossibilité	$q_1 = q_2 + \frac{p_2(1 + \beta_2)}{\alpha_2 + \beta_2}$ Unicité si : $\alpha_2 < 1$ sinon : Impossibilité	$q_1 = q_2 + \frac{p_2(1 + \beta_2) + r_2}{\alpha_2 + \beta_2}$ Unicité si : $p_2(1 - \alpha_2) + r_2(\alpha_2 + \beta_2) > 0$ sinon : Impossibilité
Stokes bidimensionnel $\lambda_1 = 1, p_1 = 0$ $\epsilon_1 \gg 1, r_1 < 0$	$q_1 > q_2$ $(q_2 - q_1)(\alpha_2 + \beta_2)$ $+ (r_2 - r_1) = 0$ Indétermination	$q_1 > q_2$ $r_1 = (\alpha_2 + \beta_2)(q_2 - q_1)$ Indétermination	$q_1 > q_2$ $(q_2 - q_1)(\alpha_2 + \beta_2)$ $+ (r_2 - r_1) = 0$ Indétermination	$q_1 > p_2 + q_2$ $p_2(1 + \beta_2) + (r_2 - r_1)$ $+ (q_2 - q_1)(\alpha_2 + \beta_2) = 0$ Indétermination	$q_1 > p_2 + q_2$ $p_2(1 + \beta_2) + (r_2 - r_1)$ $+ (q_2 - q_1)(\alpha_2 + \beta_2) = 0$ Indétermination	$q_1 > p_2 + q_2$ $p_2(1 + \beta_2) + (r_2 - r_1)$ $+ (q_2 - q_1)(\alpha_2 + \beta_2) = 0$ Indétermination

Planche II : Singularité ponctuelle ($\lambda_1 = 1$). Hypothèses : $\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 > 0 \\ \beta_2 + 1 > 0 \end{cases}$

$\mathcal{G}_2 \rightarrow$ $\mathcal{G}_1 \downarrow$		Euler bidimensionnel	Navier-Stokes	Stokes bidimensionnel	Euler unidimensionnel	Prandtl	Stokes unidimensionnel
Euler unidimensionnel	$\lambda_1 \ll 1, p_1 > 0$ $\epsilon_1 \ll 1, r_1 > 0$	$q_1 = q_2$ $\langle r_2 - r_1 \rangle = p_1 (1 + \beta_2)$ Indétermination $\langle r_2 > r_1 \rangle$	$q_1 = q_2$ $p_1 (1 + \beta_2) + r_1 = 0$ Impossibilité	$q_1 = q_2$ $p_1 (1 + \beta_2) + r_1 - r_2 = 0$ Impossibilité	$q_1 = q_2$ $p_1 > p_2$ $(p_2 - p_1) (1 + \beta_2) + (r_2 - r_1) = 0$ Indétermination	$q_1 = q_2$ $p_1 > p_2$ $r_1 = (p_2 - p_1) (1 + \beta_2)$ Impossibilité	$q_1 = q_2$ $p_1 > p_2$ $(p_2 - p_1) (1 + \beta_2) + (r_2 - r_1) = 0$ Impossibilité
Prandtl	$\lambda_1 \ll 1, p_1 > 0$ $\epsilon_1 = 1, r_1 = 0$	$q_1 = q_2$ $p_1 = \frac{r_2}{1 + \beta_2}$ Unicité	$q_1 = q_2$ $p_1 = 0$ Impossibilité	$q_1 = q_2$ $p_1 (1 + \beta_2) - r_2 = 0$ Impossibilité	$q_1 = q_2$ $p_1 > p_2$ $p_1 = p_2 + \frac{r_2}{1 + \beta_2}$ Unicité	$q_1 = q_2$ $p_1 > p_2$ $p_1 = p_2$ Impossibilité	$q_1 = q_2$ $p_1 > p_2$ $(p_2 - p_1) (1 + \beta_2) + r_2 = 0$ Impossibilité
Stokes unidimensionnel	$\lambda_1 \ll 1, p_1 > 0$ $\epsilon_1 \gg 1, r_1 < 0$	$q_1 = q_2$ $\langle r_2 - r_1 \rangle = p_1 (1 + \beta_2)$ Indétermination	$q_1 = q_2$ $p_1 (1 + \beta_2) + r_1 = 0$ Indétermination	$q_1 = q_2$ $r_2 - r_1 = p_1 (1 + \beta_2)$ Indétermination	$q_1 = q_2$ $p_1 > p_2$ $(p_2 - p_1) (1 + \beta_2) + (r_2 - r_1) = 0$ Indétermination	$q_1 = q_2$ $p_1 > p_2$ $(p_2 - p_1) (1 + \beta_2) = r_1$ Indétermination	$q_1 = q_2$ $p_1 > p_2$ $(p_2 - p_1) (1 + \beta_2) + (r_2 - r_1) = 0$ Indétermination

Planche III : Singularité tangentielle ($\theta_1 = \theta_2$, $\lambda_1 \ll \lambda_2$) hypothèse : $1 + \beta_2 > 0$.

					
	Euler bidimensionnel	Navier-Stokes	Stokes bidimensionnel	Euler unidimensionnel	Prandtl
Stokes unidimensionnel	$\lambda_1 = 1, p_1 = 0$ $\epsilon_1 \ll 1, r_1 > 0$	$\lambda_1 = 1, p_1 = 0$ $\epsilon_1 = 1, r_1 = 0$	$\lambda_1 = 1, p_1 = 0$ $\epsilon_1 \gg 1, r_1 < 0$	$\lambda_1 \gg 1, p_1 < 0$ $\epsilon_1 \ll 1, r_1 > 0$	$\lambda_1 \gg 1, p_1 < 0$ $\epsilon_1 = 1, r_1 = 0$
Euler unidimensionnel	$q_1 = p_2 + q_2$ $r_1 = r_2 + p_2 (1 - \alpha_2)$ <i>Unicité si :</i> $r_2 + p_2 (1 - \alpha_2) > 0$ <i>Sinon :</i> <i>Impossibilité</i>	$q_1 = p_2 + q_2$ $r_1 = r_2 + p_2 (1 - \alpha_2)$ <i>Unicité si :</i> $r_2 + p_2 (1 - \alpha_2) = 0$ <i>Sinon :</i> <i>Impossibilité</i>	$q_1 = p_2 + q_2$ $r_1 = r_2 + p_2 (1 - \alpha_2)$ <i>Unicité si :</i> $r_2 + p_2 (1 - \alpha_2) < 0$ <i>Sinon :</i> <i>Impossibilité</i>	$p_1 + q_1 = p_2 + q_2$ $(p_2 - p_1) (1 - \alpha_2) + (r_2 - r_1) = 0$ <i>Unicité si :</i> $1 < \alpha_2 < 1 + \frac{r_2}{p_2}$ <i>Sinon :</i> <i>Impossibilité</i>	$p_1 + q_1 = p_2 + q_2$ $(p_2 - p_1) (1 - \alpha_2) + (r_2 - r_1) = 0$ <i>Indétermination si :</i> $\alpha_2 > 1$ <i>Sinon :</i> <i>Impossibilité</i>
Prandtl	$q_1 = p_2 + q_2$ $r_1 = p_2 (1 - \alpha_2)$ <i>Unicité si :</i> $\alpha_2 < 1$ <i>Sinon :</i> <i>Impossibilité</i>	$q_1 = p_2 + q_2$ $r_1 = p_2 (1 - \alpha_2)$ <i>Unicité si :</i> $\alpha_2 = 1$ <i>Sinon :</i> <i>Impossibilité</i>	$q_1 = p_2 + q_2$ $r_1 = p_2 (1 - \alpha_2)$ <i>Unicité si :</i> $\alpha_2 > 1$ <i>Sinon :</i> <i>Impossibilité</i>	$p_1 + q_1 = p_2 + q_2$ $r_1 = (p_2 - p_1) (1 - \alpha_2)$ <i>Indétermination si :</i> $\alpha_2 < 1$ <i>Sinon :</i> <i>Impossibilité</i>	$p_1 + q_1 = p_2 + q_2$ $r_1 = (p_2 - p_1) (1 - \alpha_2)$ <i>Indétermination si :</i> $\alpha_2 > 1$ <i>Sinon :</i> <i>Impossibilité</i>
Stokes unidimensionnel	$q_1 = p_2 + q_2$ $r_1 = r_2 + p_2 (1 - \alpha_2)$ <i>Unicité si :</i> $r_2 + p_2 (1 - \alpha_2) > 0$ <i>Sinon :</i> <i>Impossibilité</i>	$q_1 = p_2 + q_2$ $r_1 = r_2 + p_2 (1 - \alpha_2)$ <i>Unicité si :</i> $r_2 + p_2 (1 - \alpha_2) = 0$ <i>Sinon :</i> <i>Impossibilité</i>	$q_1 = p_2 + q_2$ $r_1 = r_2 + p_2 (1 - \alpha_2)$ <i>Unicité si :</i> $r_2 + p_2 (1 - \alpha_2) < 0$ <i>Sinon :</i> <i>Impossibilité</i>	$p_1 + q_1 = p_2 + q_2$ $(p_2 - p_1) (1 - \alpha_2) + (r_2 - r_1) = 0$ <i>Unicité si :</i> $1 + \frac{r_2}{p_2} < \alpha_2 < 1$ <i>Impossibilité</i>	$p_1 + q_1 = p_2 + q_2$ $(p_2 - p_1) (1 - \alpha_2) + (r_2 - r_1) = 0$ <i>Indétermination</i>

Planche IV : Singularité normale ($\lambda_1 \theta_1 = \lambda_2 \theta_2, \lambda_2 \ll 1, \lambda_1 \gg 1$).

ANNEXE AU CHAPITRE III

Propriétés utilisées pour les fonctions analytiques

Soit $f(z)$ une fonction de la variable complexe $z = x + iy$, holomorphe dans un domaine $\mathcal{D}$, et dont $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ sont respectivement les parties réelles et imaginaires.

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y).$$

Propriété 1.

La fonction $g(x, y) = \varphi(x, -y) - i\psi(x, -y)$, définie dans le domaine $\overline{\mathcal{D}}$ symétrique de $\mathcal{D}$ par rapport à Ox , est une fonction holomorphe dans $\overline{\mathcal{D}}$, notée $\bar{f}(z)$, appelée fonction conjuguée de $f(z)$.

Démonstration : Les conditions de Cauchy, nécessaires et suffisantes pour démontrer l'holomorphie sont en effet satisfaites comme on le vérifie immédiatement.

Propriété 2.

La fonction $\bar{f}$ conjuguée de f , prend, en un point $M \in \overline{\mathcal{D}}$, une valeur égale à la valeur conjuguée de f évaluée au point $\bar{M} \in \mathcal{D}$, symétrique de M par rapport à Ox .

Démonstration : Il résulte en effet de la définition que :

$$\bar{f}(z) = \overline{\varphi(x, -y) + i\psi(x, -y)} \equiv \bar{f}(\bar{z}).$$

Propriété 3.

Soit $f(z)$ une fonction analytique telle que

$$f(\bar{z}) \equiv \bar{f}(z).$$

La fonction f est alors identique à une constante réelle.

Démonstration :

$$\text{On a en effet } \varphi(x, -y) + i\psi(x, -y) \equiv \varphi(x, -y) - i\psi(x, -y)$$

On en conclut donc que $\psi \equiv 0$, puis, par application des conditions de Cauchy, $\varphi \equiv c$ (constante réelle).

Propriété 4.

Soit $f(z)$ une fonction analytique telle que :

$$f(\bar{z}) \equiv \overline{f(z)} \quad (\text{ou } f(z) \equiv \overline{f(\bar{z})})$$

La partie réelle de $f(z)$ est paire en y et la partie imaginaire est impaire.

Démonstration :

par hypothèse

$$\varphi(x, -y) + i\psi(x, -y) \equiv \varphi(x, y) - i\psi(x, y)$$

d'où la propriété énoncée.

On peut en déduire la propriété que si f est continue sur l'axe réel Ox , elle y prend nécessairement une valeur réelle.

Propriété 5.

Soit $f(z)$ une fonction analytique telle que

$$f(\bar{z}) \equiv \overline{f(z)} \quad (\text{ou } f(z) \equiv \overline{f(\bar{z})})$$

alors

$$f'(\bar{z}) \equiv \overline{f'(z)}.$$

Démonstration :

Si on pose

$$\begin{cases} u(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y) \\ v(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y) \end{cases}$$

on a :

$$\begin{cases} \overline{f'(z)} = u(x, y) + iv(x, y) \\ f'(\bar{z}) = u(x, -y) - iv(x, -y). \end{cases}$$

Or, d'après la propriété 4, φ est pair en y et ψ impair ; donc :

$$\begin{cases} u(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, -y) = u(x, -y) \\ v(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, -y) = -v(x, -y) \end{cases}$$

d'où la propriété 5.

Théorème VI.

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine $\mathcal{D}$ muni d'une coupure $\widehat{AB}$, définie et continue lorsque z tend vers un point de la coupure, sauf, peut-être, aux extrémités A et B , et continue à travers la coupure. Alors $f(z)$ est holomorphe dans $\mathcal{D}$, y compris les points de la coupure, mais excepté, peut-être, les extrémités A et B .

Théorème VII.

Si la fonction f vérifie, de plus, au voisinage des extrémités A et B une condition de HOLDER du type

$$|f(z)| < \frac{C}{|z|^n}$$

où C est une constante réelle et n une constante réelle inférieure à l'unité, alors f est holomorphe également en A et B .

Démonstrations :

Les démonstrations des théorèmes VI et VII se font par utilisation du théorème de Morera et n'offrent pas de difficultés.

Q

ANNEXE AU CHAPITRE V

Nombre de lignes de séparation au voisinage de l'origine.

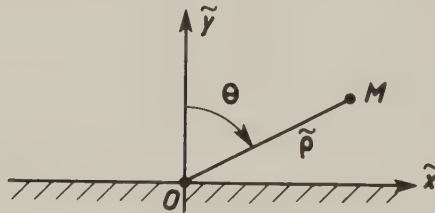
Au voisinage du point de séparation, on a vu que la solution des équations de Navier-Stokes s'écrivait, en première approximation, sous la forme (13) :

$$(13) \quad \begin{cases} \tilde{\psi} = \tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_2 \\ \tilde{\psi}_1 = \sum_n A_{1n} \tilde{\rho}^{2n} \cos \theta \cos (2n-1) \theta + \sum_n B_{1n} \tilde{\rho}^{2n+1} (2n \cos \theta \cos 2n\theta + \sin \theta \sin 2n\theta) \\ \tilde{\psi}_2 = \sum_n A_{2n} \tilde{\rho}^{2n} [2n \cos \theta \sin (2n-1) \theta - \sin 2n\theta] + \sum_n B_{2n} \tilde{\rho}^{2n-1} \cos \theta \sin (2n-2) \theta \end{cases}$$

Les notations utilisées sont précisées sur la figure ci-dessous.

Il est immédiat d'après (13) que les polynômes de degré 2 et 3 s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \tilde{\psi}^{(2)} = 4A_{11} \tilde{y}^2 \\ \tilde{\psi}^{(3)} = -\tilde{y}^2 (4B_{12} \tilde{y} + 6B_{22} \tilde{x}) \end{cases}$$



$\tilde{\psi}^{(2)}$ ne peut donc qu'être identique à zéro au voisinage d'un point de décollement, et $\tilde{\psi}^{(3)}$ conduit bien à l'existence d'une ligne de séparation, réelle, autre que la paroi, issue de O .

Montrons maintenant que tous les polynômes de degré supérieur à 3 donnent toujours plus d'une ligne de séparation telle que $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, ce qui nous permettra d'affirmer que les coefficients B_{12} et B_{22} ne sont certainement pas nuls tous les deux ; divers cas sont à envisager :

1 – Considérons d'abord la solution de degré k pair, c'est-à-dire d'après les formules (13) :

$$\tilde{\psi} \sim \tilde{\rho}^{2n} [\cos \theta \cos (2n-1) \theta + \lambda (2n \cos \theta \sin (2n-1) \theta - \sin 2n\theta)]$$

et montrons que le crochet A s'annule certainement si $n \geq 2$ pour plus d'une valeur réelle de θ (autres que $-\pi/2$ et $+\pi/2$). Pour cela, il suffit de montrer que A change de signe au moins deux fois dans l'intervalle $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ quel que soit λ

Au voisinage des bornes $\theta = \pm \pi/2$, un développement limité conduit à l'expression :

$$A \sim (-1)^{n+1} (2n-1) \frac{h^2}{4}$$

où l'on a posé

$$\theta = \epsilon \frac{\pi - h}{2}, \quad \epsilon = \pm 1, \quad h > 0 \quad \text{et} \quad h \ll 1.$$

a – Si n est pair, le crochet est donc négatif au voisinage de $\theta = \pm \pi/2$; on constate d'autre part que, pour $\theta = 0$, $A = +1$. A étant défini et continu dans l'intervalle $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ s'annule donc au moins deux fois dans cet intervalle (voir fig. a).

b – Si n est impair, A est positif au voisinage des valeurs $\theta = \pm \pi/2$; considérons une quelconque des valeurs θ_i telles que :

$$(2n-1) \theta_i = \epsilon \frac{\pi}{2}.$$

Il vient facilement

$$A(\theta_i) = \epsilon \lambda (2n-1) \cos \theta_i.$$

Or $(2n-1)$ est positif puisque $n \geq 2$, et $\cos \theta_i$ est positif puisque $-\pi/2 < \theta_i < \pi/2$.

D'autre part, par définition de θ_i , il existe certainement des valeurs θ_i différentes de $-\pi/2$ et $+\pi/2$ pour $n > 2$.

Par conséquent $A(\theta_i)$ est du signe de $\lambda \epsilon$ et en choisissant ϵ du signe contraire de λ , on définit ainsi une valeur θ_i où $A(\theta_i)$ est négatif, ce qui démontre la propriété cherchée (fig. b)

On voit donc que pour k pair on a toujours au moins deux racines réelles dans l'intervalle $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.

2 – Si k est impair, les formules (13) montrent que :

$$\tilde{\psi} \sim \tilde{\rho}^{2n+1} [2n \cos \theta \cos 2n\theta + \sin \theta \sin 2n\theta + \lambda (\cos \theta \sin 2n\theta)].$$

On remarque que l'on peut toujours supposer $\lambda > 0$ car prendre $\lambda < 0$ revient à changer θ en $-\theta$ et on ne sort pas de l'intervalle $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.

– Pour $\theta = 0$ le crochet B est positif $(2n)$.

– Pour $\theta = \frac{\pi - h}{2}$, $B \sim (-1)^{n+1} \frac{nh^2}{2} \lambda \epsilon$

Figure a.

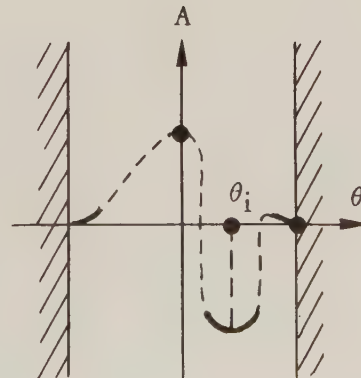
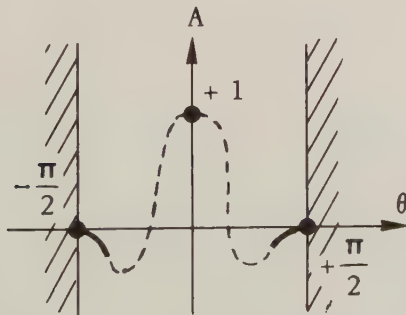


Figure b.

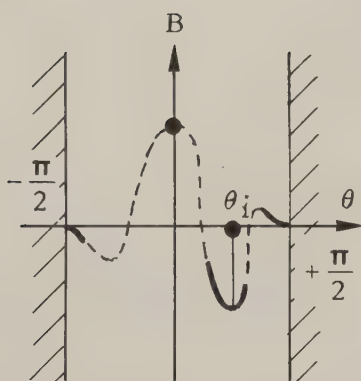


Figure c.

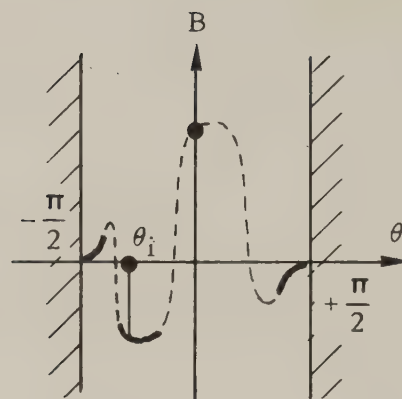


Figure d.

par conséquent, au voisinage de $\theta = \pm \pi/2$, B est du signe de $(-1)^{n+1}\epsilon$.

– Pour $2n\theta_i = \epsilon'\pi$ avec $\epsilon' = \pm 1$, on obtient : $B = -2n \cos \theta_i$ donc toujours négatif.

a – Si n est impair, en choisissant $\epsilon' > 0$, on peut donc toujours trouver un θ_i tel que $0 < \theta_i < \pi/2$ pour lequel B est positif en O et au voisinage de $+\pi/2$, B s'annule au moins deux fois dans l'intervalle $0 < \theta < \pi/2$ (fig. c).

b – Si n est pair, on peut de même, en choisissant $\epsilon' < 0$, toujours trouver un θ_i dans l'intervalle $-\pi/2 < \theta < 0$ pour lequel $B(\theta_i)$ est négatif alors que $B(0)$ et $B(-\pi/2)$ sont positifs (fig. d).

Par conséquent dans tous les cas les polynômes homogènes de degré supérieur à 3 ont au moins deux racines dans l'intervalle $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.

Q

ANNEXE VII. 1

Calculs des fonctions $\Delta\Psi_2$ et Ψ_2

Ψ_2 est solution de (A.1) :

$$(A.1) \quad \Delta(\Delta\Psi_2) - \frac{\partial}{\partial\xi}(\Delta\Psi_2) = u_1 \frac{\partial}{\partial\xi}(\Delta\Psi_1) + v_1 \frac{\partial}{\partial\eta}(\Delta\Psi_1) = F_1$$

En utilisant les formules (17) du texte, le second membre F_1 s'écrit, après avoir posé $\rho = 2u$:

$$\begin{aligned} F_1 = & e^{u \cos \theta} K'_1(u) \left\{ e^{\xi/2} \left(\frac{\sin \theta}{2} K_1 + \frac{\sin 2\theta}{4} K_0 \right) - \frac{\sin \theta}{2u} \right\} \\ & + e^{u \cos \theta} K_1(u) \left\{ -\frac{\sin 2\theta}{4u} - e^{\xi/2} K_0 \left(\frac{\sin 2\theta}{4u} - \frac{\sin \theta}{2} \right) + e^{\xi/2} K_1 \frac{\sin 2\theta}{4} \right\} \end{aligned}$$

On introduit alors la fonction π telle que :

$$(A.2) \quad \Delta\Psi_2 = e^{u \cos \theta} \pi$$

Il s'ensuit que π est solution de (A.3)

$$(A.3) \quad \begin{aligned} \Delta\pi - \frac{\pi}{4} = & K'_1 \left\{ e^{\xi/2} \left(\frac{\sin \theta}{2} K_1 + \frac{\sin 2\theta}{4} K_0 \right) - \frac{\sin \theta}{2u} \right\} \\ & + K_1 \left\{ e^{\xi/2} K_1 \frac{\sin 2\theta}{4} - e^{\xi/2} \left(\frac{\sin 2\theta}{4u} - \frac{\sin \theta}{2} \right) K_0 - \frac{\sin 2\theta}{4u} \right\} \end{aligned}$$

On en cherche la solution en posant :

$$(A.4) \quad \pi = \pi_1 + \pi_2$$

avec :

$$(A.5) \quad \begin{cases} \Delta\pi_1 - \frac{\pi_1}{4} = -\frac{\sin \theta}{2u} K'_1 - \frac{\sin 2\theta}{4u} K_1 \\ \Delta\pi_2 - \frac{\pi_2}{4} = e^{\xi/2} \left\{ K'_1 \left(\frac{\sin \theta}{2} K_1 + \frac{\sin 2\theta}{4} K_0 \right) + \frac{\sin 2\theta}{4} K_1^2 - K_0 K_1 \left(\frac{\sin 2\theta}{4u} - \frac{\sin \theta}{2} \right) \right\} \end{cases}$$

La première équation s'intègre facilement en cherchant la solution sous la forme :

$$(A.6) \quad \pi_1 = \sin \theta f_{11}(u) + \sin 2\theta f_{12}(u)$$

f_{11} est solution de l'équation de Bessel (A.7) :

$$(A.7) \quad u^2 f_{11}'' + u f_{11}' - (1 + u^2) f_{11} = -2u K_1'(u)$$

Cette équation se résout sans difficulté et conduit à (A.8), solution générale qui ne croît pas exponentiellement à l'infini :

$$(A.8) \quad f_{11} = C_{11} [K_1(u) - \text{Log } u]$$

De même f_{12} est solution de (A.9) et s'écrit sous la forme (A.10) :

$$(A.9) \quad u^2 f_{12}'' + u f_{12}' - (4 + u^2) f_{12} = -u K_1(u)$$

$$(A.10) \quad f_{12} = C_{12} K_2(u) + \frac{K_1}{u} + \frac{K_2 \text{Log } u}{2} + \frac{K_0}{u^2}$$

La première équation (A.5) est ainsi complètement intégrée. Pour la seconde, le calcul est plus complexe par suite de la présence, au second membre, du facteur $e^{\frac{\xi}{2}}$, qui nous conduit à rechercher la solution sous forme d'un développement en série de Fourier ; pour ce faire on développe d'abord le second membre, qui est de la forme :

$$F_2 = e^{u \cos \theta} (A(u) \sin \theta + B(u) \sin 2\theta)$$

avec :

$$(A.11) \quad \begin{cases} A(u) = \frac{1}{2} (K_1 K_1' + K_0 K_1) \\ B(u) = \frac{1}{4} (K_0 K_1' + K_1^2 - \frac{K_0 K_1}{u}) \end{cases}$$

Le coefficient a_n de $\sin n\theta$ dans le développement de F_2 s'obtient au moyen de la formule :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{u \cos t} (A \sin t + B \sin 2t) \sin nt \, dt$$

soit :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{A}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{u \cos t} [\cos (n-1)t - \cos (n+1)t] \, dt \\ &+ \frac{B}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{u \cos t} [\cos (n-2)t - \cos (n+2)t] \, dt \end{aligned}$$

D'après la représentation intégrale des fonctions de Bessel, on voit que :

$$a_n = [A(I_{n-1} - I_{n+1}) + B(I_{|n-2|} - I_{n+2})]$$

On est donc ramené au problème ci-dessous :

$$\Delta \pi_2 - \frac{\pi_2}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta [A(I_{n-1} - I_{n+1}) + B(I_{|n-2|} - I_{n+2})]$$

On en cherche la solution en posant :

$$\pi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta f_{2n}(u)$$

Les fonction $f_{2n}(u)$ sont alors solutions d'une suite d'équations de Bessel et on constate sans peine qu'elles peuvent s'écrire sous la forme* :

$$f_{2n}(u) = C_{2n}K_n(u) + K_n(u) \int_u^{\infty} G_n(\xi)I_n(\xi) d\xi - I_n(u) \int_u^{\infty} G_n(\xi)K_n(\xi) d\xi$$

avec :

$$(A.12) \quad G_n(\xi) = 4\xi \left\{ A(\xi) [I_{n-1}(\xi) - I_{n+1}(\xi)] + B(\xi) [I_{|n-2|}(\xi) - I_{n+2}(\xi)] \right\}$$

En regroupant tous ces résultats, on est conduit à la formule suivante :

$$\Delta\Psi_2 = e^{u \cos \theta} \pi(u, \theta) = F_2$$

avec :

$$(A.13) \quad \pi = \sin \theta (C_{11}K_1 - \text{Log } u K_1) + \sin 2\theta (C_{12}K_2 + \frac{K_1}{u} + \frac{K_2 \text{ Log } u}{2} + \frac{K_0}{u^2}) \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta (C_{2n}K_n + K_n \int_u^{\infty} G_n I_n d\xi - I_n \int_u^{\infty} G_n K_n d\xi)$$

Pour achever l'intégration de (A.13) il suffit de faire un nouveau développement en série de Fourier : le second membre F_2 s'écrit en effet :

$$(A.14) \quad F_2 = \sum_{k=1}^{\infty} e^{u \cos \theta} B_k(u) \sin k\theta = \Delta\Psi_2$$

Les fonctions $B_k(u)$ sont complètement déterminées au moyen des formules (A.13), (A.12) et (A.11).

Les coefficients b_n du développement de Fourier de F_2 s'écrivent sous la forme :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{u \cos t} \sum_{k=1}^{\infty} B_k(u) \sin kt \sin nt dt \\ = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} B_k(u) \int_{-\pi}^{+\pi} e^{u \cos t} \sin kt \sin nt dt \\ = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} B_k(u) \int_{-\pi}^{+\pi} e^{u \cos t} [\cos(k-n)t - \cos(k+n)t] dt$$

Utilisant à nouveau la représentation intégrale des fonctions de Bessel, on voit que :

$$(A.15) \quad b_n(u) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(u) \left[\frac{I(u)}{|k-n|} - \frac{I(u)}{k+n} \right]$$

* On peut vérifier facilement que, malgré la présence des fonctions $I_n(\xi)$, les fonctions $f_{2n}(u)$ ne croissent pas exponentiellement à l'infini, mais tendent bien vers zéro. ($G_n(\xi) \sim \alpha_n \frac{e^{-\xi}}{\xi^{3/2}}$).

On est alors ramené à intégrer l'équation :

$$(A.16) \quad \Delta \Psi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(u) \sin n\theta = F_2$$

ce qui montre que Ψ_2 peut s'écrire sous la forme :

$$(A.17) \quad \Psi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(u) \sin n\theta ,$$

les $g_n(u)$ étant solutions des équations différentielles :

$$g_n'' + \frac{g_n'}{u} - \frac{n^2 g_n}{u^2} = 4b_n(u)$$

La résolution de ces équations n'offre pas de difficulté, la solution générale s'écrivant :

$$(A.18) \quad g_n = \lambda_n u^n + \frac{\mu_n}{u^n} - u^n \int_u^{\infty} \frac{2b_n}{n} u^{1-n} du - \frac{1}{u^n} \int_0^u \frac{2b_n}{n} u^{n+1} du$$

Il faut tout de même s'assurer que les intégrales intervenant dans (A.18) restent définies aux bornes choisies (∞ et 0 respectivement). Cette propriété est vérifiée et résulte des comportements de $b_n(u)$ au voisinage de zéro et de l'infini. On a en effet :

$$(A.19) \quad \begin{cases} B_1(u) = [(C_{11} + C_{21}) - \text{Log } u] K_1 + K_1 \int_u^{\infty} G_1 I_1 d\xi - I_1 \int_u^{\infty} G_1 K_1 d\xi \\ B_2(u) = [(C_{12} + C_{22}) K_2 + \frac{K_1}{u} + \frac{K_2 \text{Log } u}{2} + \frac{K_0}{u^2} + K_2 \int_u^{\infty} G_2 I_2 d\xi - I_2 \int_u^{\infty} G_2 K_2 d\xi] \\ B_n(u) = C_{2n} K_n(u) + K_n \int_u^{\infty} G_n I_n d\xi - I_n \int_u^{\infty} G_n K_n d\xi \quad \text{pour } n > 2 \end{cases}$$

(Les constantes C_{21} et C_{22} étant arbitraires on peut toujours choisir $C_{11} = C_{12} = 0$)

$$(A.20) \quad b_n(u) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(u) [I_{|k-n|}(u) - I_{k+n}(u)]$$

Ces expressions nous permettent d'obtenir les comportements des fonctions $b_n(u)$ sous la forme suivante, en se limitant au premier terme du développement.

a) Lorsque $u \rightarrow \infty$

$$G_n(u) \sim \frac{e^{-u}}{u^{3/2}} \quad (\text{à un coefficient multiplicatif près connu})$$

d'où :

$$G_n(u) I_n(u) \sim \frac{1}{u^2} \quad \text{et} \quad G_n(u) K_n(u) \sim \frac{e^{-2u}}{u^2}$$

donc :

$$\int_u^{\infty} G_n(\xi) I_n(\xi) d\xi \sim \frac{1}{u} \quad \text{et} \quad \int_u^{\infty} G_n(\xi) K_n(\xi) d\xi \sim \frac{e^{-2u}}{u^2}$$

L'expression (A.19) de $B_n(u)$ pour $n > 2$ conduit alors au comportement suivant :

$$(A.21) \quad B_n(u) \sim C_{2n} \sqrt{\frac{\pi}{2u}} e^{-u} + \dots$$

De même, pour $n = 1$ et 2 , on obtient respectivement :

$$(A.22) \quad \begin{cases} B_1(u) \sim -\text{Log } u \sqrt{\frac{\pi}{2u}} e^{-u} + \dots \\ B_2(u) \sim \frac{\text{Log } u}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2u}} e^{-u} + \dots \end{cases}$$

On voit que pour $n = 1$ et 2 , c'est la partie non homogène de la solution qui impose le comportement à l'infini, c'est-à-dire que les coefficients de ces comportements sont connus.

L'utilisation de la formule (A.20) permet d'obtenir ensuite le comportement de $b_n(u)$ sous la forme :

$$(A.23) \quad \begin{cases} b_1 \sim \gamma_1 \frac{\text{Log } u}{u^2} + \dots \\ b_2 \sim \gamma_2 \frac{\text{Log } u}{u^2} + \dots \\ b_n \sim \gamma_3 \frac{C_{2n}}{u^2} + \dots \end{cases}$$

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sont des constantes connues.

De ces formules, on déduit les comportements suivants de la première intégrale intervenant dans (A.18) :

$$(A.24) \quad \begin{cases} n = 1 : & u \int_u^\infty 2b_1 du \sim 2\gamma_1 u \int_u^\infty \frac{\text{Log } u}{u^2} du \\ n = 2 : & u^2 \int_u^\infty \frac{b_2}{u} du \sim \gamma_2 u^2 \int_u^\infty \frac{\text{Log } u}{u^3} du \\ n > 2 : & u^n \int_u^\infty \frac{2b_n}{n} u^{1-n} du \sim \frac{2\gamma_3}{n} C_{2n} u^n \int_u^\infty u^{-1-n} du \end{cases}$$

Il est donc clair que cette intégrale est définie, quel que soit n , lorsque $u \rightarrow \infty$.

b) On montre, par l'étude du comportement lorsque $u \rightarrow 0$ que la deuxième intégrale intervenant dans (A.18) est, elle aussi, définie pour la borne $u = 0^*$.

Ecrivons maintenant que la solution de notre problème $g_n(u)$ s'annule à l'infini et, pour cela, comparons les ordres de grandeur des différents termes apparaissant dans (A.18) : Il est d'abord manifeste que le deuxième terme est négligeable devant le premier, de même que le troisième puisqu'on a déjà vu que l'intégrale qui y figure s'annule pour $u \rightarrow \infty$. Il reste donc à comparer les premier et quatrième termes ; en utilisant le développement (A.23) de $b_n(u)$ lorsque $u \rightarrow \infty$, on constate que ce quatrième terme se comporte comme $(\text{Log } u)$ pour $n = 1$ et 2 et comme une constante pour $n > 2$. La condition d'annulation de $g_n(u)$ à l'infini impose donc :

$$\lambda_n = 0.$$

* Cf. Annexe VII,2.

On peut refaire un raisonnement analogue pour $u \rightarrow 0$, car on a à écrire la condition de raccord avec le développement de Stokes, condition qui impose, dans $g_n(u)$, l'absence de terme de la forme u^{-n} ; on obtient ainsi :

$$\mu_n = 0$$

Il résulte finalement de toute cette discussion que la solution Ψ_2 s'écrit :

$$(A.25) \quad \Psi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(u) \sin n\theta$$

avec :

$$(A.26) \quad g_n(u) = -u^n \int_u^{\infty} \frac{2b_n(u)}{n} u^{1-n} du - \frac{1}{u^n} \int_0^u \frac{2b_n(u)}{n} u^{n+1} du .$$

E

ANNEXE VII. 2

Comportements de Ψ_1 , Ψ_2 et Φ_0 lorsque $\rho \rightarrow 0$.

Comportement de Ψ_1

On sait (formule 15) que :

$$\Psi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \left(\frac{\rho}{2} \right) \frac{\rho \sin n\theta}{n}$$

avec

$$\varphi_n = 2K_1 I_n + K_0 (I_{n+1} + I_{n-1})$$

L'utilisation des développements des fonctions de Bessel pour les petites valeurs de la variable conduit aux résultats suivants :

$$\begin{aligned} \varphi_1 \left(\frac{\rho}{2} \right) &\sim -\text{Log } \rho + (\text{Log } 4 - \gamma + 1) - \frac{\rho^2}{32} \text{Log } \rho + \frac{\rho^2}{32} (\text{Log } 4 - \gamma + 1) + \dots \\ \varphi_2 \left(\frac{\rho}{2} \right) &\sim -\frac{\rho}{4} \text{Log } \rho + \frac{\rho}{8} (1 + 2 \text{Log } 4 - 2\gamma) - \frac{\rho^3}{96} \text{Log } \rho + \frac{\rho^3}{96} (\text{Log } 4 - \gamma + 1) + \dots \\ \varphi_3 \left(\frac{\rho}{2} \right) &\sim -\frac{\rho^2}{32} \text{Log } \rho + \frac{\rho^2}{96} (1 + 3 \text{Log } 4 - 3\gamma) + \dots \\ \varphi_4 \left(\frac{\rho}{2} \right) &\sim -\frac{\rho^3}{8 \times 48} \text{Log } \rho + \frac{\rho^3}{16 \times 96} (4 \text{Log } 4 - 4\gamma + 1) + \dots \end{aligned}$$

Pratiquement, dans le problème qui nous occupe, on n'a besoin que de φ_1 et φ_2 ; Il vient donc :

$$\begin{aligned} \Psi_1 &\sim \sin \theta [-\rho \text{Log } \rho + \rho (\text{Log } 4 - \gamma + 1) + \dots] \\ &\quad + \sin 2\theta \left[-\frac{\rho^2}{8} \text{Log } \rho + \frac{\rho^2}{16} (1 + 2 \text{Log } 4 - 2\gamma) + \dots \right] \end{aligned}$$

Comportement de Ψ_2 lorsque $u \rightarrow 0$.

Reprenons la solution (A.25), (A.26) obtenue dans l'annexe VII,1.

Lorsque $\xi \rightarrow 0$, on a, les comportements suivants des $G_n(\xi)$

$$G_n(\xi) \sim A \xi^{n-3} \text{Log } \xi + B \xi^{n-3}$$

d'où on déduit le comportement des intégrales intervenant dans B_k :

$$(A.29) \quad \begin{cases} K_n(u) \int^u G_n(\xi) I_n(\xi) d\xi \sim \frac{A}{2n} \frac{u^{n-2} \text{Log } u}{2n-2} + \frac{u^{2n-2}}{2n(2n-2)} \left[\frac{A}{2n-2} + B \right] + \dots \\ I_n(u) \int^u G_n(\xi) K_n(\xi) d\xi \sim -\frac{A}{4n} u^{n-2} \text{Log } u - \frac{u^{n-2}}{2n} \left[\frac{A}{4} + \frac{B}{2} \right] + \dots \end{cases}$$

Si on reprend l'expression (A.19) de $B_n(u)$, on voit que, pour avoir son comportement lorsque $u \rightarrow 0$, il suffit d'ajouter aux deux expressions ci-dessus, le développement de $C_{2n}K_n(u)$ qui est de la forme :

$$C_{2n}K_n(u) \sim C_{2n}(n-1)! \frac{2^{n-1}}{u^n} + \dots$$

C'est donc ce dernier terme qui impose le comportement de $B_n(u)$ dès que $n > 1$, à condition que $C_{2n} \neq 0$.

$$B_n(u) \sim \frac{(n-1)! 2^{n-1} C_{2n}}{u^n} + \dots \quad \text{si } C_{2n} \neq 0.$$

Cette expression conduit à la conclusion déjà obtenue par Proudman et Pearson que tous les C_{2n} sont nuls sauf peut-être C_{21} : Il suffit, pour le voir, d'écrire la condition de raccord avec la solution de Stokes réordonnée au voisinage de l'infini, pour le tourbillon $\Delta\Psi'$. En utilisant l'expression (A.14) de $\Delta\Psi_2$ on constate immédiatement que $\Delta\Psi_2$, qui doit se comporter comme $1/u$, d'après ce raccord, ne peut satisfaire cette condition que si tous les C_{2n} sont nuls (sauf peut-être C_{21} qui donne un comportement en $1/u$).

La constante C_{21} est elle-même connue du fait qu'à l'ordre $(\text{Log } R)^{-2}$, le terme correspondant doit nécessairement se raccorder au terme de la forme $(\sin \theta)/u$ provenant de $\Delta\Psi'$, c'est-à-dire, d'après le tableau donné dans le texte, au terme $-(2k_2 \sin \theta)/u$; or k_2 est connu par l'approximation précédente d'ordre $(\text{Log } R)^{-1}$.

Ceci nous permet de conclure, sans faire effectivement le développement de Ψ_2 , que cette fonction ne contient aucune constante arbitraire, donc que son comportement à l'origine est parfaitement déterminé.

Pour avoir ce comportement, nous remarquons ensuite que la condition de raccord avec la solution de Stokes n'impose que la connaissance de g_1 et g_2 dans la solution (A.25). En utilisant les développements (A.29) et le fait que tous les C_{2n} sont nuls sauf C_{21} , connu, on obtient le comportement des $B_n(u)$, donc, d'après (A.20) les développements de $b_1(u)$ et $b_2(u)$, d'où finalement ceux de $g_1(u)$ et $g_2(u)$ par (A.26); en revenant à la variable ρ , on aboutit ainsi à la conclusion que :

$$(A.30) \quad \Psi_2 \sim A\rho \text{Log } \rho \sin \theta + B\rho \sin \theta + \dots$$

$$+ C\rho^2 (\text{Log } \rho)^2 \sin 2\theta + D\rho^2 \text{Log } \rho \sin 2\theta + E\rho^2 \sin 2\theta + \dots$$

Les constantes A, B, C, D, E sont connues, en principe. On peut remarquer que A, C et D peuvent être obtenues directement, c'est-à-dire sans faire tout le développement des g_n à partir de (A.26); Il suffit, pour cela d'identifier les deux développements des premier et second membres de l'équation initiale (A.1). On utilise pour cela l'expression (A.30) de Ψ_2 et le développement, relativement facile à obtenir de F_1 , ce qui conduit au résultat :

$$A = -(\text{Log } 4 - \gamma + \frac{1}{2})$$

$$C = \frac{1}{16}$$

$$D = -\frac{1}{32} (8 \text{ Log } 4 - 8\gamma + 5)$$

Les deux constantes B et E , coefficients de solutions de l'équation $\Delta\Psi_2 = 0$ ne peuvent pas être obtenues par ce procédé rapide. Elles ne peuvent être déterminées que par le développement complet de la fonction Ψ_2 donnée par (A.25) et (A.26). Leurs valeurs numériques n'étant pas essentielles dans l'exposé, nous les laissons sous cette forme, étant bien entendu qu'elles sont connues.

Comportement de Φ_0 .

Φ_0 étant solution de l'équation d'Oseen et devant être raccordé à une solution de Stokes de la forme $(\rho \sin \theta)$ et $(\rho \text{ Log } \rho \sin \theta)$, admet, au voisinage de l'origine un développement analogue à celui de Ψ_1 , c'est-à-dire :

$$\Phi_0 \sim \alpha [-\rho \text{ Log } \rho \sin \theta + \rho \sin \theta (\text{Log } 4 - \gamma + 1) + \dots].$$

S

ANNEXE VII. 3

Solution d'Oberbeck pour le problème de l'écoulement de Stokes autour d'un ellipsoïde (cf. [3])

Les variables étant les variables physiques, il s'agit de trouver la solution du problème (A.31), avec les conditions limites (A.32)

$$(A.31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu \Delta u = \frac{\partial p}{\partial x} \\ \mu \Delta v = \frac{\partial p}{\partial y} \\ \mu \Delta w = \frac{\partial p}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

$$(A.32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{A l'infini,} \quad u \rightarrow U, \quad v \rightarrow 0, \quad w \rightarrow 0 \\ \text{Sur l'ellipsoïde} \quad u = v = w = 0 \end{array} \right.$$

La solution du problème, donnée par Oberbeck, s'exprime à l'aide du potentiel Newtonien $\Phi(x, y, z)$ et du potentiel électrostatique $\psi(x, y, z)$ de l'ellipsoïde. Si ce dernier a pour équation (A.33)

$$(A.33) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

les potentiels Φ et ψ sont définis par les intégrales (A.34) dans lesquels λ est la racine de l'équation (A.35) et $\Delta(\xi)$ l'expression (A.36) :

$$(A.34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(x, y, z) = \pi abc \int_{\lambda}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi} - \frac{z^2}{c^2 + \xi} \right) \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} \\ \Psi(x, y, z) = \Psi(\lambda) = 2\pi abc \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} \end{array} \right.$$

$$(A.35) \quad \frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1$$

$$(A.36) \quad \Delta(\xi) = [(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)(c^2 + \xi)]^{1/2}$$

Le champ des vitesses s'obtient alors au moyen des formules (A.37) dans lesquelles A et B sont deux constantes.

$$(A.37) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + B(x \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi) + U \\ v = A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + Bx \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ w = A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + Bx \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{array} \right.$$

Les conditions $u = v = w = 0$ sur l'ellipsoïde permettent de calculer A et B sous la forme :

$$A = \frac{Ua^2}{\psi(o) + a^2 \alpha_0} \quad B = \frac{A}{a^2}$$

où :

$$\alpha_0 = 2\pi abc \int_0^\infty \frac{d\xi}{(a^2 + \xi) \Delta(\xi)}$$

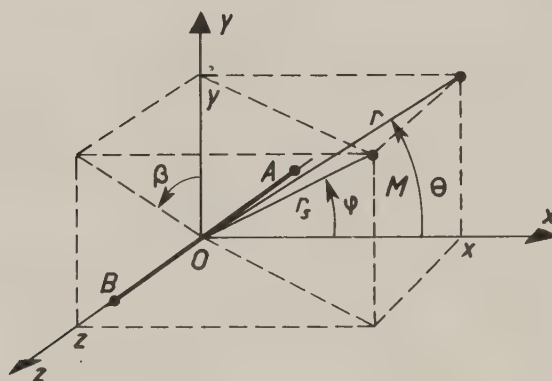
Lorsqu'on applique ces formules générales au cas particulier étudié, on obtient sans difficulté les formules données dans le texte.

Q

ANNEXE VII. 4

Passage des coordonnées sphériques aux coordonnées semi-polaires et cartésiennes.

Cette transformation est nécessitée par le fait qu'on connaît la solution d'Oseen en écoulement tridimensionnel, à l'infini, en coordonnées sphériques, alors qu'on a besoin de la raccorder à un développement de Stokes, au voisinage de l'ellipsoïde, connu en coordonnées polaires. Les notations sont précisées sur la figure ci-dessous, un point M étant repéré par ses coordonnées sphériques (r_s, φ, β) ou polaires (r, θ, z) .



Les formules de changement de coordonnées s'écrivent sous la forme :

$$x = r \cos \theta = r_s \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta = r_s \sin \varphi \cos \beta$$

$$z = z = r_s \sin \varphi \sin \beta$$

On en déduit aisément les formules suivantes donnant les composantes du vecteur vitesse en M dans les trois systèmes :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = u_{r_s} \cos \varphi - u_\varphi \sin \varphi \\ u_y = u_{r_s} \sin \varphi \cos \beta + u_\varphi \cos \varphi \cos \beta \\ u_z = u_{r_s} \sin \varphi \sin \beta + u_\varphi \cos \varphi \sin \beta \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta \\ u_\theta = -u_x \sin \theta + u_y \cos \theta \\ u_z = u_z \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r = (u_{r_s} \cos \varphi - u_\varphi \sin \varphi) \cos \theta + (u_{r_s} \sin \varphi \cos \beta + u_\varphi \cos \varphi \cos \beta) \sin \theta \\ u_\theta = -(u_{r_s} \cos \varphi - u_\varphi \sin \varphi) \sin \theta + (u_{r_s} \sin \varphi \cos \beta + u_\varphi \cos \varphi \cos \beta) \cos \theta \\ u_z = u_{r_s} \sin \varphi \sin \beta + u_\varphi \cos \varphi \sin \beta \end{array} \right.$$

Ce sont ces trois dernières formules qui sont pratiquement utilisées.

Q

ANNEXE VII. 5

Formulation des problèmes liés à la seconde approximation de l'écoulement autour d'un ellipsoïde.

Lorsqu'on porte le développement (46) du texte dans les équations complètes du mouvement, on constate que les trois problèmes relatifs à chacun des indices 0, 1, 2 se découplent entièrement. On est ainsi conduit aux expressions suivantes :

Problème I .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{u_0}{r} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial r} - \frac{u_0}{r^2} - \frac{\partial p_0}{\partial r} = \frac{1}{2} [f_1 \frac{\partial f_1}{\partial r} + f_3 \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{f_2}{r} (f_1 + f_2)] \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} - \frac{\partial p_0}{\partial z} = \frac{1}{2} [f_1 \frac{\partial f_3}{\partial r} + f_3 \frac{\partial f_3}{\partial z} - \frac{f_2 f_3}{r}] \end{array} \right.$$

avec les conditions limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} - \text{Sur } r^2 + \epsilon^2 z^2 = \epsilon^2, \quad u_0 = w_0 = 0 \\ - \text{Lorsque } r, z \rightarrow \infty, \quad u_0 \sim -\frac{C_2 r^3}{8 (r^2 + z^2)^{3/2}}, \quad w_0 \sim \frac{C_2 z (2z^2 + r^2)}{8 (r^2 + z^2)^{3/2}} \end{array} \right.$$

Problème II .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} - \frac{2u_1}{r^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{2v_1}{r^2} - \frac{\partial p_1}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2} - \frac{2v_1}{r^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial r} - \frac{2u_1}{r^2} + \frac{p_1}{r} = 0 \\ \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} - \frac{w_1}{r^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_1}{\partial z} - \frac{\partial p_1}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{u_1}{r} + \frac{v_1}{r} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

Avec les conditions limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} - \text{Sur } r^2 + \epsilon^2 z^2 = \epsilon^2, \quad \text{on a : } u_1 = v_1 = w_1 = 0 \\ - \text{Lorsque } r, z \rightarrow \infty, \quad u_1 \sim \frac{C_2}{2}, \quad v_1 \sim -\frac{C_2}{2}, \quad w_1 \rightarrow 0. \end{array} \right.$$

Problème III .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} - \frac{4u_2}{r^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{4v_2}{r^2} - \frac{u_2}{r^2} - \frac{\partial p_2}{\partial r} = \frac{1}{2} [f_1 \frac{\partial f_1}{\partial r} + f_3 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{f_2}{r} (f_1 + f_2)] \\ \frac{\partial^2 v_2}{\partial r^2} - \frac{4v_2}{r^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_2}{\partial r} - \frac{4u_2}{r^2} - \frac{v_2}{r^2} + \frac{2p_2}{r} = 0 \\ \frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} - \frac{4w_2}{r^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_2}{\partial r} - \frac{\partial p_2}{\partial z} = \frac{1}{2} [f_1 \frac{\partial f_3}{\partial r} + f_3 \frac{\partial f_3}{\partial z} + \frac{f_2 f_3}{r}] \\ \frac{\partial u_2}{\partial r} + \frac{u_2}{r} + \frac{\partial w_2}{\partial z} + \frac{2v_2}{r} = 0 \end{array} \right.$$

Avec les conditions limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} - \text{Sur } r^2 + \epsilon^2 z^2 = \epsilon^2, \quad u_2 = v_2 = w_2 = 0 \\ - \text{Lorsque } r, z \rightarrow \infty, \quad u_2 \sim -\frac{C_2 r (2z^2 + 3r^2)}{8 (z^2 + r^2)^{3/2}}, \\ \quad v_2 \sim \frac{C_2 r}{4 (z^2 + r^2)^{1/2}}, \quad w_2 \sim -\frac{C_2 r^2 z}{8 (r^2 + z^2)^{3/2}} \end{array} \right.$$

La recherche de l'approximation d'ordre R se ramène donc à l'intégration de trois systèmes différentiels linéaires où n'interviennent plus que les variables r et z . Ces systèmes ont une structure assez simple et il ne paraît pas impossible de les résoudre analytiquement. La seule difficulté provient de l'écriture des conditions limites sur l'ellipsoïde et à l'infini où la symétrie sphérique doit jouer un rôle important.

Ceci nous a amené à introduire un système de coordonnées elliptiques ξ, η définies au moyen des formules:

$$\left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{1 - \epsilon^2} \operatorname{sh} \xi \sin \eta \\ z = \sqrt{1 - \epsilon^2} \operatorname{ch} \xi \cos \eta \end{array} \right.$$

L'ellipsoïde est alors défini par la valeur constante de ξ telle que :

$$\xi = \xi_c \quad \text{avec :} \quad \epsilon = \operatorname{th} \xi_c$$

Dans ce système de variables, les conditions limites s'écrivent très simplement puisqu'on est conduit aux conditions ci-après :

a) pour $\xi = \xi_c$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = w_0 = 1 \\ u_1 = v_1 = w_1 = 0 \\ u_2 = v_2 = w_2 = 0 \end{array} \right.$$

b) Pour $\xi \rightarrow \infty$:

$$\begin{cases} u_0 \sim -\frac{C_2}{8} \sin^3 \eta \\ w_0 \sim \frac{C_2}{8} (1 + \cos^2 \eta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 \sim \frac{C_2}{2} \\ v_1 \sim -\frac{C_2}{2} \\ w_1 \rightarrow 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_2 \sim -\frac{C_2}{4} \sin \eta - \frac{C_2}{8} \sin^3 \eta \\ v_2 \sim \frac{C_2}{4} \sin \eta \\ w_2 \sim -\frac{C_2}{8} \sin^2 \eta \cos \eta \end{cases}$$

Comme prévu, la variable ξ n'apparaît donc plus dans les conditions limites, mais malheureusement les équations deviennent beaucoup plus compliquées et malgré plusieurs tentatives nous n'avons pu en obtenir les solutions pour ϵ quelconque ; par contre, nous avons construit les développements asymptotiques des fonctions u_0 , $w_0 \dots w_2$ pour ϵ petit, mais ceci ne présente pas grand intérêt vu le but recherché initialement concernant l'évolution de l'écoulement depuis $\epsilon = 1$ jusqu'à $\epsilon = 0$.

E

ANNEXE AU CHAPITRE VIII

I. – Les fonctions $A''(z)$, $B''(z)$, $C''(z)$, $D''(z)$ sont uniformes.

Reprenons les expressions des vitesses et tourbillon, pour la solution antisymétrique $\bar{\psi}_1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial z} = A'(z) + \bar{z}C'(z) + C(\bar{z}) \quad , \quad u = i \left(\frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial z} - \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \bar{z}} \right) \\ \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \bar{z}} = A'(\bar{z}) + zC'(\bar{z}) + C(z) \quad , \quad v = - \left(\frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial z} + \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \bar{z}} \right) \\ \frac{\partial^2 \bar{\psi}_1}{\partial z \partial \bar{z}} = C'(z) + C'(\bar{z}) = -2\omega \end{array} \right.$$

Envisageons alors un circuit fermé (C) quelconque, dans le plan complexe, qui ne traverse pas la coupure AB. Une solution physiquement admissible doit être telle que, lorsqu'on décrit (C) en revenant au point de départ, $\bar{\psi}_1$, u , v et ω , ainsi que toutes leurs dérivées par rapport à $\bar{x}$ et $\bar{y}$, doivent reprendre les mêmes valeurs : Il suffit alors d'écrire que $\partial\omega/\partial\bar{x}$ et $\partial\omega/\partial\bar{y}$ ne changent pas pour obtenir les conditions ci-dessous :

- $C''(z) + C''(\bar{z})$ reprend la même valeur
- $i[C''(z) - C''(\bar{z})]$ reprend la même valeur.

Par combinaison linéaire de ces deux expressions on voit que nécessairement $C''(z)$ est une fonction uniforme de la variable z .

– Ecrivons maintenant qu'une combinaison linéaire L réelle des vitesses reprend la même valeur après un tour complet ; Nous choisissons pour L l'expression :

$$L = z \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial z} + \bar{z} \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \bar{z}} = zA'(z) + \bar{z}A'(\bar{z}) + z\bar{z}[C'(z) + C'(\bar{z})] + zC(\bar{z}) + \bar{z}C(z)$$

Dans cette expression, le terme $z\bar{z}[C'(z) + C'(\bar{z})] = -2\rho^2\omega$ est déjà uniforme ; D'autre part :

$$zC(\bar{z}) + \bar{z}C(z) \equiv \bar{\psi}_1 - A(z) - A(\bar{z})$$

et on sait que $\bar{\psi}_1$ doit également reprendre la même valeur après un tour complet. Il reste donc la condition suivante :

$$L' = zA'(z) + \bar{z}A'(\bar{z}) - A(z) - A(\bar{z}) \quad \text{doit être uniforme.}$$

Cette quantité étant réelle, ses dérivées par rapport à $\bar{x}$ et $\bar{y}$, donc aussi, par combinaison linéaire, par rapport à z et $\bar{z}$, doivent être invariantes sur le circuit fermé (C).

$$\text{or} \quad \frac{\partial L'}{\partial z} = A''(z)$$

Donc $A''(z)$ est uniforme.

Une démonstration tout à fait analogue peut être donnée pour $B''(z)$ et $D''(z)$.

II. — Résolution du problème aux limites pour A'' , B'' , C'' , D'' .

Nous venons de voir que $A''(z)$, $B''(z)$, $C''(z)$ et $D''(z)$ reprennent la même valeur lorsqu'on a fait un tour complet sur un circuit fermé (C) du plan complexe ne traversant pas la coupure AB ; Cette propriété nous permet d'affirmer que ces fonctions n'ont certainement pas un comportement logarithmique à l'infini.

Formuler pour ces fonctions l'hypothèse qu'elles sont de degré fini à l'infini est donc *beaucoup moins restrictif* que lorsque cette hypothèse était faite pour les fonctions A' , B' , C' , D' .

Nous allons donc chercher à résoudre un problème aux limites, de part et d'autre de la coupure AB , pour les *seules dérivées secondes* A'' , B'' , C'' , D'' . Un tel problème peut effectivement être obtenu en écrivant les conditions *nécessaires*, mais non suffisantes, que $\partial u/\partial x$ et $\partial^2 v/\partial x^2$ sont nuls de part et d'autre de la coupure AB .

Pour le problème antisymétrique, on obtient ainsi les conditions suivantes :

$$(A.1) \quad A''^+ + \bar{x}C''^+ = A''^- + \bar{x}C''^-$$

$$(A.2) \quad A'''^+ + \bar{x}C'''^+ + z(C''^+ + C''^-) + A'''^- + \bar{x}C'''^- = 0$$

La première équation permet d'obtenir immédiatement la fonction $A''(z) + zC''(z)$ sous la forme :

$$(A.3) \quad A''(z) + zC''(z) = 2P_1''(z)$$

$P_1''(z)$ étant une fonction holomorphe en tout point de la coupure AB . Notons que la formule (A.3) n'est vraie que dans la mesure où est satisfaite la condition de Holder (A.4) aux extrémités A et B de la coupure ($z \rightarrow a$)

$$(A.4) \quad |A''(z) + zC''(z)| \leq \frac{K}{(z^2 - a^2)^n} \quad (n < 1)$$

L'utilisation de la formule (A.3) permet alors d'écrire la relation (A.2) sous la forme :

$$(A.5) \quad (C'' + P_1''')^+ + (C'' + P_1''')^- = 0$$

Cette dernière relation, jointe à la condition de Holder (A.6), permet d'exprimer C'' sous la forme (A.7)

$$(A.6) \quad |(z^2 - a^2)(C'' + P_1''')| \leq \frac{K'}{(z^2 - a^2)^{n'}} \quad (n' < 1)$$

$$(A.7) \quad C''(z) = -P_1'''(z) + \frac{\alpha z + \beta a^2}{(z^2 - a^2)^{3/2}} + \frac{f(z)}{\sqrt{z^2 - a^2}}$$

$f(z)$ désignant une fonction quelconque holomorphe sur AB et α, β deux constantes réelles.

Des formules (A.3) et (A.7) on peut, par intégration déduire $A(z)$ et $C(z)$: Comme ces formules ne sont obtenues que par les conditions nécessaires $\partial u / \partial x = \partial^2 v / \partial x^2 = 0$ sur AB , on achève de déterminer la solution en écrivant sur les expressions obtenues, les conditions nécessaires et suffisantes : $u = v = 0$ sur AB , ce qui conduit aux formules (6) du texte. (La méthode pour déterminer $B(z)$ et $D(z)$ est tout à fait analogue).

E

Manuscrit remis le 11 septembre 1969.

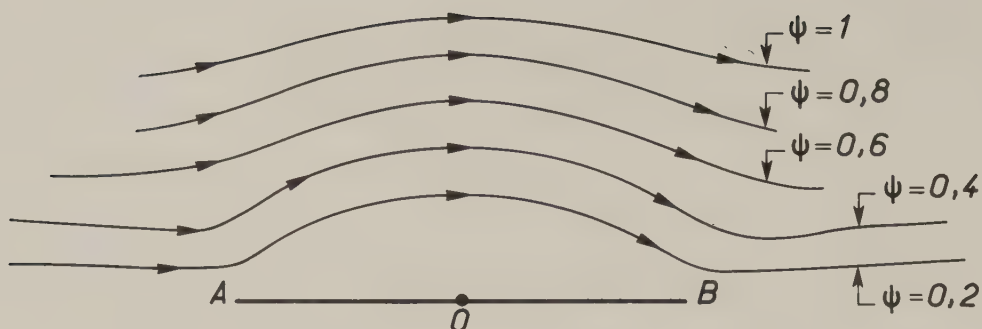


PLANCHE VIII, 1 : Incidence nulle. Solution avec vitesses singulières en A et B .

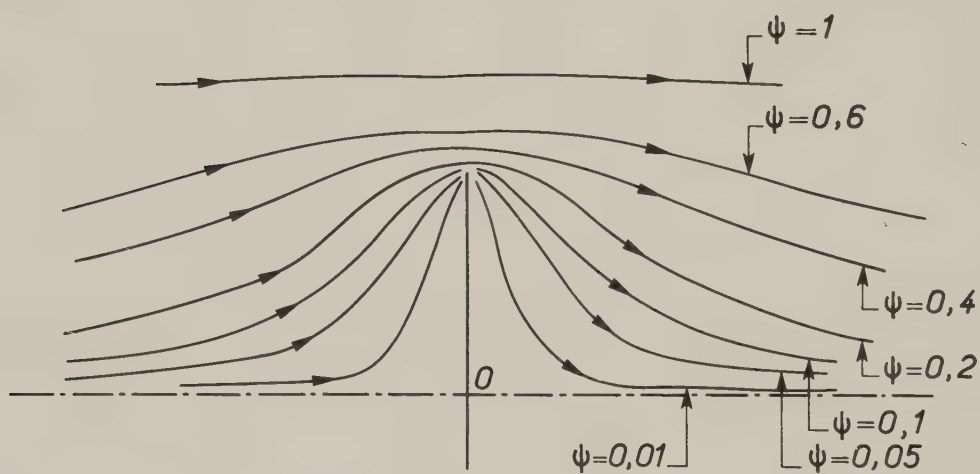


PLANCHE VIII, 2 : Incidence $i = 90^\circ$. Solution avec vitesses singulières en A et B .

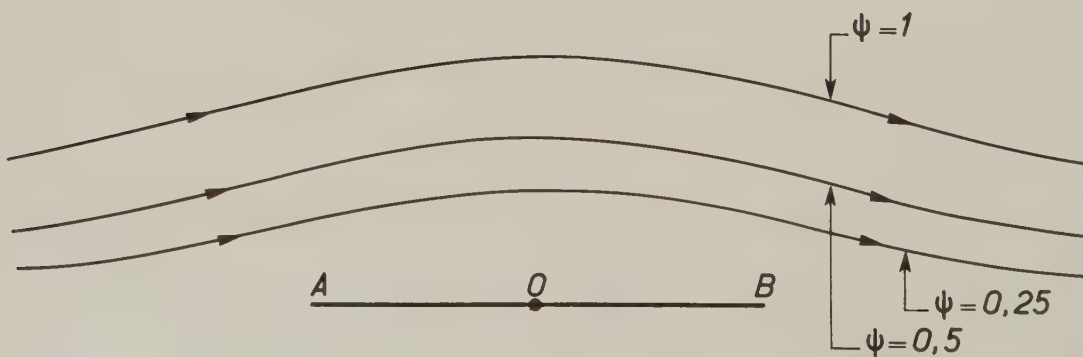


PLANCHE VIII, 3 : Incidence nulle. Solution avec vitesses régulières en A et B .

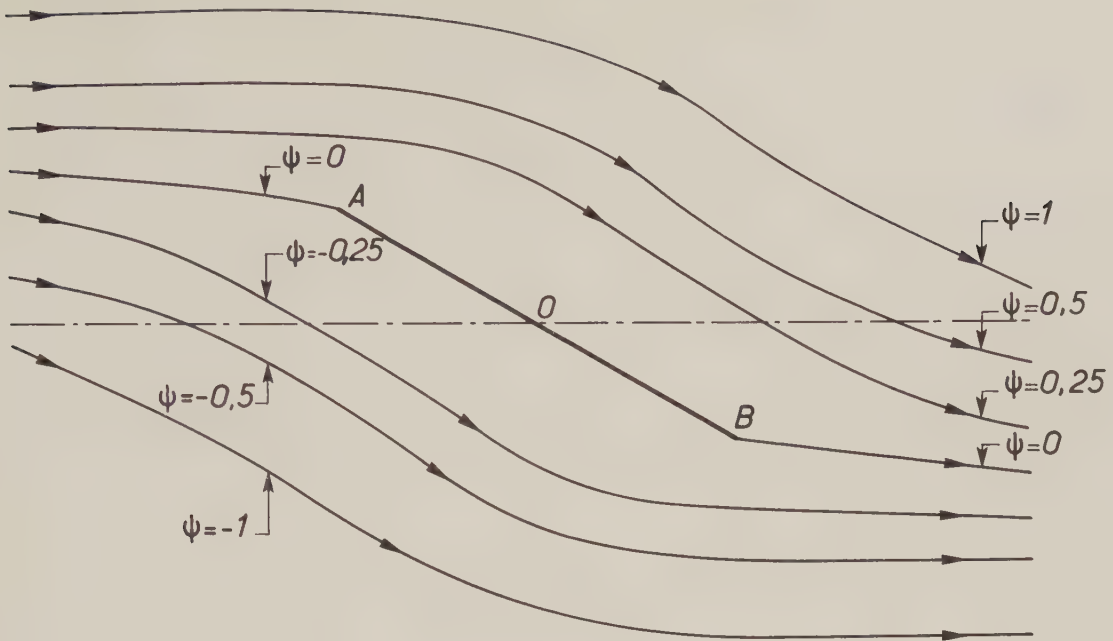


PLANCHE VIII, 4 : Incidence $i = 30^\circ$. Solution régulière.

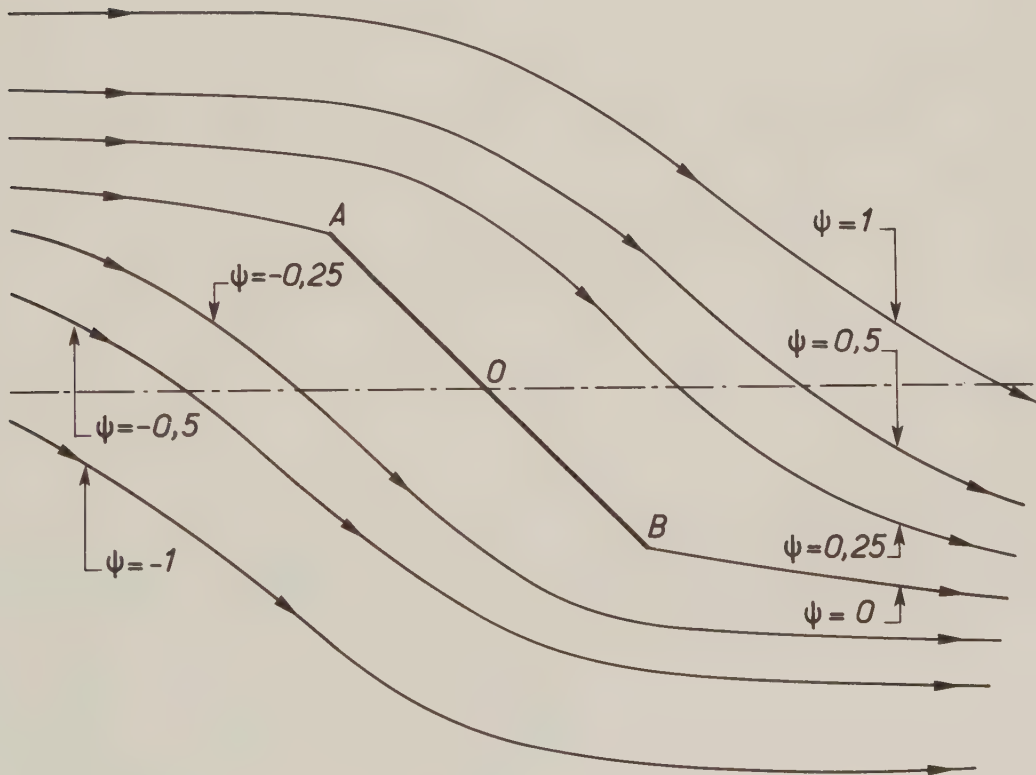


PLANCHE VIII, 5 : Incidence $i = 45^\circ$. Solution régulière.

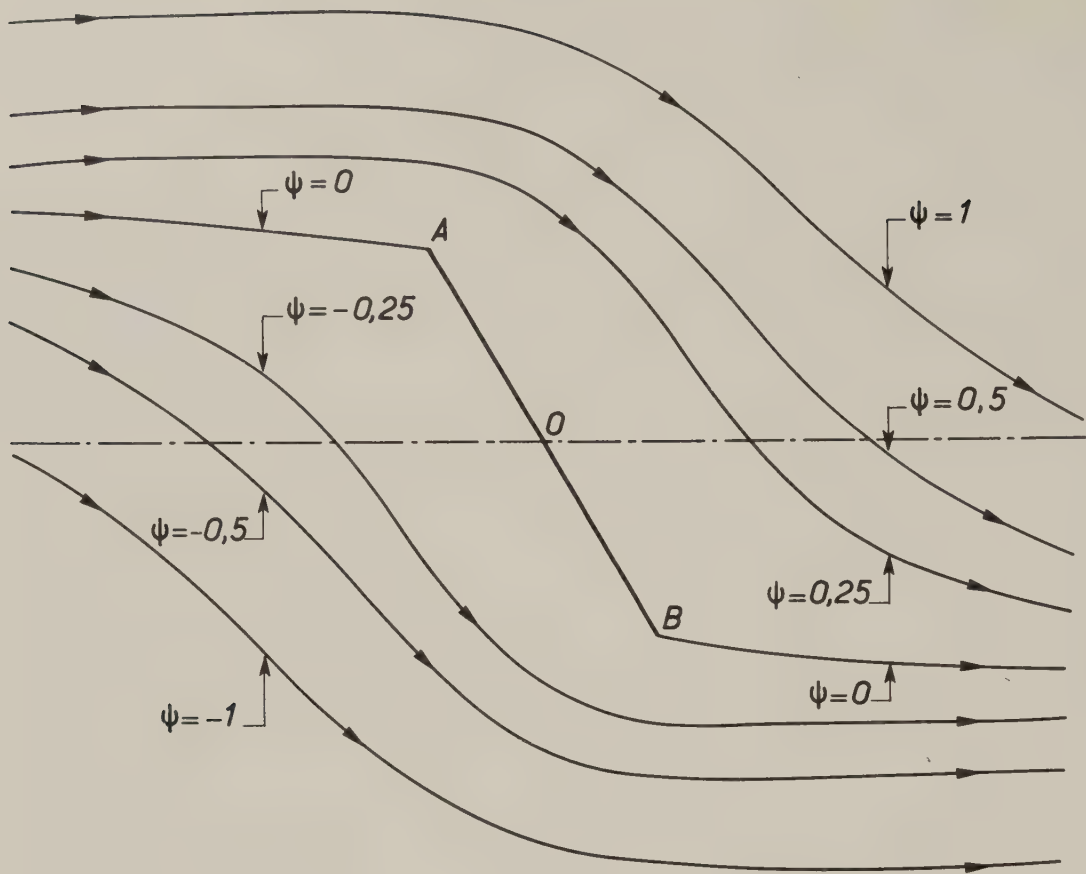


PLANCHE VIII, 6 : Incidence $i = 60^\circ$. Solution régulière.

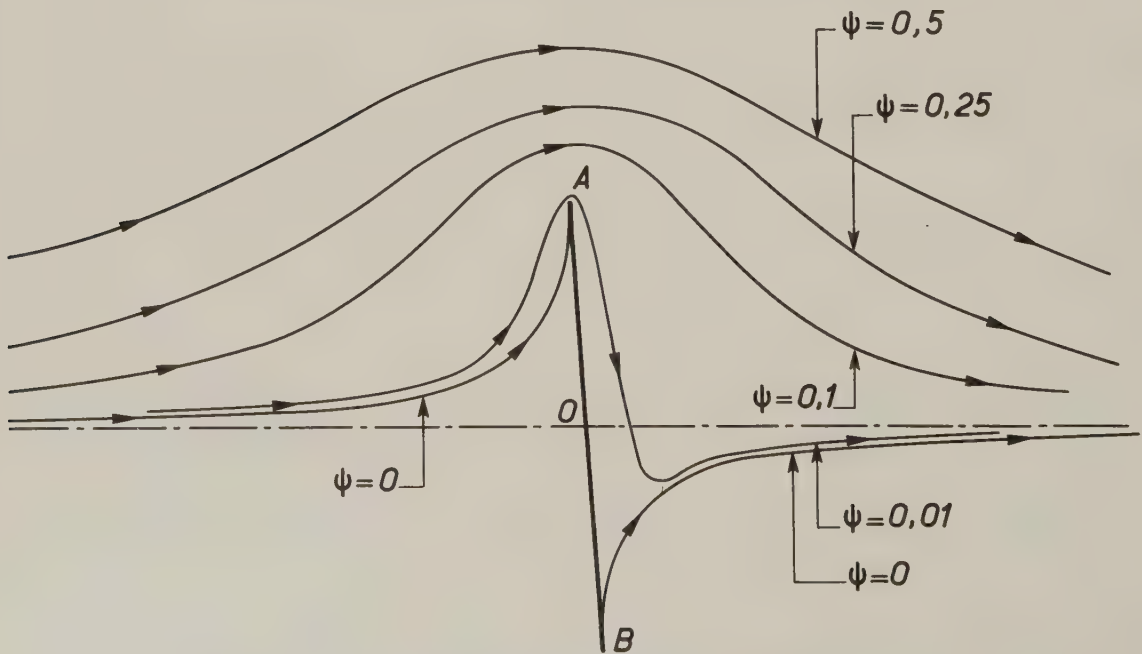


PLANCHE VIII, 7 : Incidence $i = 88^\circ$. Solution régulière.

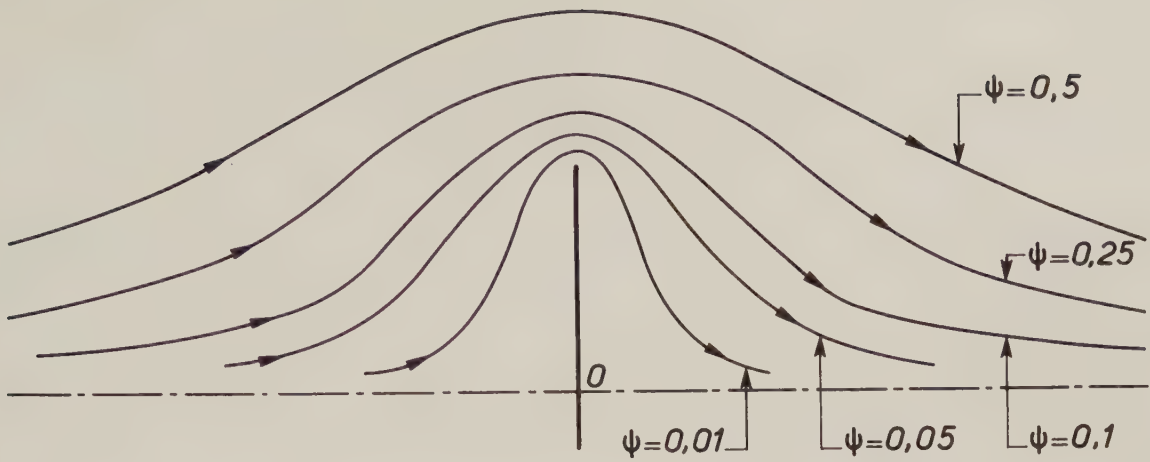


PLANCHE VIII, 8 : Incidence $i = 90^\circ$. Solution régulière.

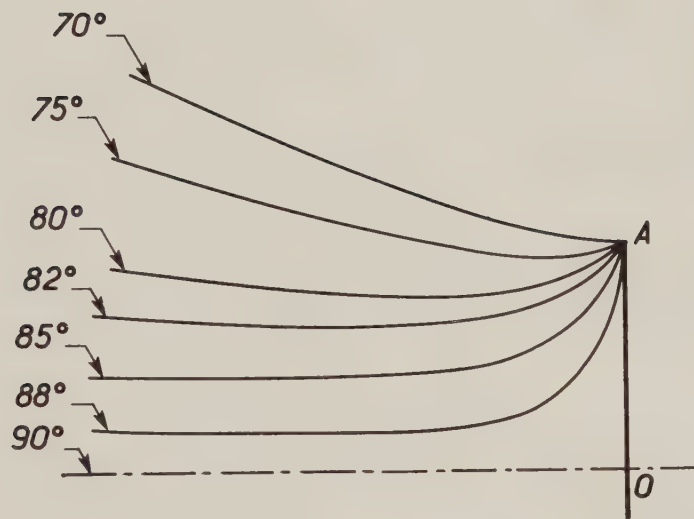


PLANCHE VIII, 9 : Evolution de la position et de la forme de la ligne de séparation en fonction de l'incidence.

E

RÉFÉRENCES

- [1] G.K. BATCHELOR. – “*An introduction to fluid dynamics.*” Cambridge University Press, (1967).
- [2] G.K. BATCHELOR. – “*On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number.*” J. Fluid. Mech., t.1, (1956), p. 177.
- [3] R. BERKER. – “*Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible.*” Handbuch der Physik. VIII. 2, Springer Verlag, (1963).
- [4] S.N. BROWN and K. STEWARTSON. – “*Laminar separation*”. Annual Review of Fluid Mechanics, vol. 1, Palo Alto Calif., (1969).
- [5] O.R. BURGGRAF. – “*Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flows.*” J. Fluid. Mech., t. 24, (1966), p. 113.
- [6] G.F. CARRIER and C.C. LIN. – “*On the nature of the boundary layer near the leading edge of a flat plate.*” Quart. J. Appl. Math., 6, (1948).
- [7] D. CATHERALL and K.W. MANGLER. – “*The integration of the two-dimensionnal laminar boundary layer equations past the point of vanishing skin friction.*” J. Fluid Mech., 26, t. 1, (1966), p.163.
- [8] R.T. CHENG. – “*An investigation on the laminar flow around the trailing edge of a flat plate.*” University of California, Berkeley, Report n° AS-67-8.
- [9] S. CHILDRESS. – “*Solution of Euler's equations containing finite eddies.*” Phys. Fluid., 9, n° 5, (1966), p. 860.
- [10] J. COLE. – “*Perturbation methods in applied mathematics*”. Blaisdell, (1968).
- [11] R. COURANT and D. HILBERT. – “*Methods of mathematical physics.*” Vol. 1 et 2, Interscience Publishers, (1963).
- [12] W.R. DEAN. – “*Note on the motion of liquid near a position of separation.*” Proc. Camb. Phil. Soc., 46, (1950).
- [13] W.R. DEAN. – “*On the steady motion of viscous liquid past a flat plate.*” Mathematika, t. 1, (1954), p. 143.
- [14] W.R. DEAN and P.E. MONTAGNON. – “*On the steady motion of viscous liquid in a corner.*” Proc. Camb. Phil. Soc., 45, (1949), p. 389.
- [15] ERDELYI. – “*Asymptotic expansions.*” Dover publication.
- [16] R. FINN. – Arch. Rat. Mech. Anal., t. 3, (1959), p. 381.
- [17] R. FINN. – Acta. Math., t. 105, (1961), p. 197.
- [18] R. FINN and W. NOLL. – Arch. Rat. Mech. Anal., t. 1, (1957), p. 97.
- [19] C. FRANÇOIS. – “*Structure asymptotique des franges extérieures d'une couche limite laminaire hyper-sonique.*” Rech. Aérosp., n° 106, (1965).
- [20] C. FRANÇOIS. – “*Comportement asymptotique d'une couche limite laminaire loin de la paroi.*” C. R. Ac. Sc. Paris, série A, t. 262, (1966), p. 920. Rech. Aérosp., n° 116, (1967).

- [21] C. FRANÇOIS. – “Etude des équations de Navier-Stokes au voisinage d’une paroi. Application au décollement sur plaque plane.” Rech. Aérosp. n° 121, (1967).
- [22] C. FRANÇOIS. – “Etude asymptotique des équations de Navier-Stokes pour les mouvements laminares d’un fluide visqueux incompressible.” C. R. Ac. Sc. Paris, série A, t. 267, (1968), p. 429.
- [23] C. FRANÇOIS. – “Conditions de raccord entre deux domaines décrits par des approximations distinctes en écoulement laminaire.” C. R. Ac. Sc. Paris, série A, t. 268, (1969), p. 1642.
- [24] C. FRANÇOIS et M. BOURCIER. – “Intégration numérique des équations de Navier-Stokes dans une cavité carrée.” Rech. Aérosp., n° 131, (1969).
- [25] C. FRANÇOIS et H. WERLÉ. – “Vérification expérimentale de la théorie de Prandtl-Batchelor.” Rech. Aérosp., n° 128, (1969).
- [26] S. GOLDSTEIN. – “On laminar boundary layer flow near a position of separation.” Quart. J. Mech. Appl. Math., t. 1, (1948). p. 43.
- [27] S. GOLDSTEIN. – “Concerning some solutions of the boundary layer equations in hydrodynamics.” Proc. Camb. Phil. Soc., t. 26, part 1, (1929).
- [28] W.P. GRAEBEL. – “Slow viscous shear flow past a plate in a channel.” Phys. Fluid., t. 8, n° 11, (1965), p. 1929.
- [29] A.S. GROVE, F.H. SHAIR, E.E. PETERSEN and A. ACRIVOS. – “An experimental investigation of the steady separated flow past a circular cylinder.” J. Fluid. Mech., t. 19, part 1, (1964), p. 60.
- [30] J.P. GUIRAUD. – “A propos de la séparation d’une couche limite laminaire.” C. R. Ac. Sc. Paris, t. 268, série A, (1969), p. 239.
- [31] I. IMAI. – “A new method of solving Oseen’s equations and its application to the flow past an inclined elliptic cylinder.” Proc. Roy. Soc. A. 224, (1954), p. 141.
- [32] I. IMAI. – Proc. Roy. Soc. A. 208, (1951), p. 487.
- [33] S. KAPLUN. – “Fluid mechanics and singular perturbations.” Academic Press, (1967).
- [34] S. KAPLUN. – “Low Reynolds number flow past a circular cylinder.” J. Math. Mech., Vol. 6, n° 5, (1957).
- [35] S. KAPLUN and P.A. LAGERSTRÖM. – “Asymptotic expansions of the Navier-Stokes solutions for small Reynolds numbers.” J. Math. Mech., Vol. 6, n° 5, (1957).
- [36] H.B. KELLER and H. TAKAMI. – “Numerical studies of steady viscous flow about cylinders.” Dans *Numerical solutions of nonlinear differential equations*. (ed. D. GREENSPAN, New-York, Wiley).
- [37] V.A. KONDRAT’EV. – “Asymptotic solution of the Navier-Stokes equations near the angular point of the boundary.” P.M.M., Vol. 31, n° 1, (1967), p. 119.
- [38] O.A. LADYZHENSKAYA. – “The mathematical theory of viscous incompressible flow.” Mathematics and its applications. Vol. 2, Gordon and Breach, (1963).
- [39] P.A. LAGERSTROM. – “Laminar flow theory.” High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion, Vol. IV, Princeton University Press, (1964).
- [40] P.A. LAGERSTRÖM and J.D. COLE. – “Examples illustrating expansion procedures for the Navier-Stokes equations.” J. Rat. Mech. Anal., 4, (1955), p. 817.
- [41] H. LAMB. – “Hydrodynamics.” Dover Publication.
- [42] R. LEGENDRE. – “Décollement laminaire régulier.” C. R. Ac. Sc. Paris, t. 241, (1955), p. 732.

- [43] J. LERAY. – C. R. Ac. Sc. Paris, t. 192, (1931), p. 1180.
- [44] J. LERAY. – J. Math. pures appl., 12, (1933), p.1.
- [45] H. LIEPMANN and A. ROSHKO. – “*Elements of gasdynamics*”. Wiley and sons, (1962).
- [46] H.J. LUGT and E.W. SCHWIDERSKI. – “*Flows around dihedral angles.*” Proc. Roy. Soc. A., 285, (1965), p. 382.
- [47] H.K. MOFFATT. – “*Viscous and resistive eddies near a sharp corner.*” J. Fluid. Mech., Vol. 18, t. 1, (1964), p. 1.
- [48] I.N. MUSKHELISHVILI. – “*Singular integral equations.*” P. Noordhoff. Groningen, Holland, (1953).
- [49] V.Y. NEILAND and V.V. SYCHEV. – “*Asymptotic solutions of the N-S equations in regions with large local perturbations.*” Mekhanika Zhidkosti i gaza 4, (1966), p. 674 - 678.
- [50] K. OSWATITSCH. – “*Die Ablösungsbedingung von Grenzschichten.*” IUTAM symposium Freiburg 1957, Springer Verlag (1958).
- [51] L. PRANDTL. – “*Gesammelte abhandlungen.*” Vol. II, Springer Verlag, (1961).
- [52] I. PROUDMAN and J. PEARSON. – “*Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder.*” J. Fluid Mech., t. 2, (1957), p. 237.
- [53] L. ROSENHEAD. – “*Laminar boundary layers.*” Oxford University Press, (1963).
- [54] H. SCHILCHTING. – “*Boundary layer theory.*” Mac Graw Hill (1960).
- [55] D. SHANKS. – “*Non linear transformations of divergent and slowly convergent sequences.*” J. Math. Phys., t. 34, (1955), p. 1.
- [56] K. STEWARTSON. – “*On the flow downstream of separation in an incompressible fluid.*” Proc. Camb. Phil. Soc., t. 49, (1953), p. 561.
- [57] K. STEWARTSON. – “*On Goldstein’s theory of laminar separation.*” J. Mech. Appl. Math., t. 11, (1958) p. 399.
- [58] K. STEWARTSON. – “*On the flow near the trailing edge of a flat plate.*” Proc. Roy. Soc. A., 306, (1968), p. 275.
- [59] F.E. TALKE. – “*An analysis of the flow near the trailing edge of a flat plate using series truncation.*” University of California, Berkeley, Rep. AS. 68-11, (1968).
- [60] D.J. TRITTON. – “*Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds numbers.*” J. Fluid Mech., t. 6, (1959), p. 547.
- [61] R. UNDERWOOD. – “*Calculation of incompressible flow past a circular cylinder at moderate Reynolds numbers.*” J. Fluid. Mech., t. 37, part 1, (1969), p. 95.
- [62] M. VAN DYKE. – “*Perturbation methods in fluid mechanics.*” Academic Press, (1964).
- [63] M. VAN DYKE. – “*The circle at low Reynolds number as a test of the method of series truncation.*” 11^{ème} congrès de mécanique Munich 1964. Springer Verlag, (1966).
- [64] M. VAN DYKE. – “*Higher approximations in boundary layer theory.*” J. Fluid. Mech. 14, p. 161, (Part 1), – 14, p. 481, (Part 2), – 19, p. 145, (Part 3).
- [65] H. VIVIAN and S.A. BERGER. – “*The base flow and near-wake problem at very low Reynolds numbers.*” J. Fluid. Mech., 23, 3, (1965), p. 439.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

MÉTHODES NUMÉRIQUES EN MÉTÉOROLOGIE

Vu et approuvé :

Orsay, le 20 mai 1970

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

G. POITOU

